અનુક્રમણિકા(Index)

સાદી પ્રસંવાદી ગતિ (Simple Harmonic Motion)

પ્રસ્તાવના (Introduction) :

એક કણ દ્વારા સાદી પ્રસંવાદી ગતિ ત્યારે ઉત્પન્ન થાય છે જ્યારે કોઇ સમયે આ કણનું કોઇ એક સ્થિતિ અથવા મધ્યસ્થ બિદૃંની સાપેક્ષ પ્રવેગીત ગતિની સાથે ક્રમીક સ્થાનાંતરણ થાય અને આમ કણની સા. પ્ર. ગ. એ તેના મધ્યસ્થ બિદૃંને સાપેક્ષ થતા સ્થાનાંતરણ અને દિશાને સમપ્રમાણ હોય છે.

આ પ્રકારની ગતિની લાક્ષણિકતાઓ નીચે મુજબ હોય છે.

(a) કણની ગતિ દોલીત હોય છે અને તે વારાફરતી એકજ માર્ગ પર ગતિ કરે છે.

(b) કણની ગતિ સીધી રેખામાં હોય છે.

(c) તેની પ્રતિસ્થાપિત બળની દિશા એ તેના સ્થિત બિદૃં તરફ હોય છે.

(d) તેનું પ્રતિસ્થાપિત બળ એ તેના મધ્યસ્થ બિદૃં અથવા તો સ્થિત બિદૃં થી થતા સ્થાનાંતરણ ને સમપ્રમાણ હોય છે.

ઉપરની લાક્ષણિકતામાંથી જો કણ દ્વારા ફક્ત શરત (a) સંતોષાય તો તેને આવર્ત ગતિ કહેવાય છે. અને જો શરત (a) અને (b) બંને સંતોષાય તો તેને દોલીત ગતિ કહેવાય છે. અને જો બધી જ શરતો (**a, b, c d**) સંતોષાય તો તેને સા.પ્ર.ગ. કહેવાય છે.

સૂર્યની ફરતે થતી પૃથ્વીની ગતિ એ આવર્ત ગતિ છે. ઘડીયાળના લોલકની ગતિ કે સ્વરકાંટામાં થતી ધ્રુજારી એ દોલીત ગતિ છે.

અને એક જ લોલક કે જેની લંબાઇ ખૂબ વધારે રાખવામાં આવે અને તેને સૂક્ષ્મ દોલન આપવામાં આવે તો તેના દ્વારા જે ગતિ રચાય છે તેને સા.પ્ર.ગ. કહેવાય છે.

પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં આપણે આવી બે સા.પ્ર.ગ.ના જુદાજુદા સંયોજન દ્વારા કણ પર થતી અસર અને તે કણ દ્વારા રચાતા ગતિપથની વિસ્તૃત ચર્ચા કરીશું.

સમાન આવૃતિએ સમાન દિશામાં બે સાદી પ્રસંવાદી ગતિની રચના (Composition of Two simple Harmonic Motions Along The Same Direction of The Same Frequency 2.8):

સરખી દોલન આવૃતિ પરંતુ જુદીજુદી કળાએ એકજ દિશામાં થતી બે સાદી પ્રસંવાદી ગતિ દ્વારા કોઇ એક કણ પર થતી અસર સમજવા,

જો બે સા.પ્ર.ગ. દ્વારા કણનું સ્થાનાંતર y_1 અને y_2 થાય તો કોઇ તત્કાલ સમય એ તે નીચે મુજબ દર્શાવાય છે.

$\boldsymbol{y_1 = a\sin\omega t}$ ---------- (1) & $\boldsymbol{y_2 = b\sin(\omega t+\ \alpha)}$ ----------- (2)

અહીં કોઇ તત્કાલ સમય t એ પહેલી સા.પ્ર.ગ.ની કળા $\boldsymbol{\omega t}$ છે. અને બીજી સા.પ્ર.ગ.ની કળા $(\boldsymbol{\omega t}+\boldsymbol{\alpha})$ છે. તેથી તે બે વચ્ચેનો કળા તફાવત $\boldsymbol{\alpha}$ થશે.

તેથી કોઇ તત્કાલ સમય t એ પરિણામી સ્થાનાંતર એ બંને સા.પ્ર.ગ.ના સ્વતંત્ર સ્થાનાંતર y_1 અને y_2 ના ભૌમિતીક બરાબર થશે. તેથી સમી. (1) અને (2) પરથી

Y = $y_1 + y_2$

$= a \sin \omega t + b \sin(\omega t + \alpha)$

$= (a + b \cos \alpha) \sin \omega t + (b \sin \alpha) \cos \omega t$ ----------- (3)

હવે $a + b\cos\alpha = A\cos\in$ અને $b\sin\alpha = A\sin\in$ લેતાં અને તેની સમી.(3)માં મૂકતાં

$y = A\sin(\omega t + \in)$ ------------ (4)

જ્યાં $A^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$

અને $\in = tan^{-1} \frac{b\sin\alpha}{a+b\cos\alpha}$

પરિણામી ગતિનું સમીકરણ (4) એ એક સરખી આવૃતિના ઘટકોની સા.પ્ર.ગ. દર્શાવે છે.

વિશિષ્ટ કિસ્સાઓ:

(i) જો α = 0 , 2π , 4π અથવા π ના બેકી ગુણાંકમાં હોય તો,

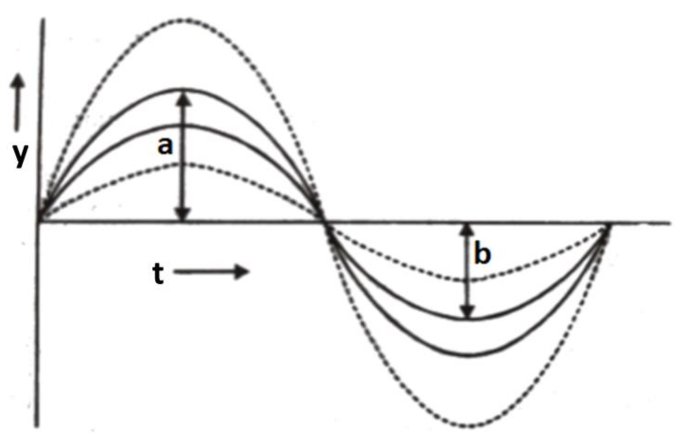
A = a +b , $\in = 0$ અને $y = (a + b)\sin \omega t$

(ii) જો α = π , 3π , 5π અથવા π ના એકી ગુણાંકમાં હોય તો ,

A = a - b , $\in = 0$ અથવા $y = (a - b)\sin \omega t$

જો a = b તો આવી પરિસ્થિતિમાં કણની સ.પ્ર.ગ. ઉદભવતી નથી પણ t ની દરેક કિંમત માટે y = 0 થાય છે.

(i)



કિસ્સા(i) માટે બે ગતિનો સ્થાનાંતર વિરૂધ્ધ સમયનો આલેખ ઉપરની આકૃતિ(1)માં દર્શાવેલ છે. તેના દોલનોનો અવર્ત સમાન છે. અને તેમની વચ્ચેનો કળાતફાવત α = 0 , 2π , 4π વગેરે છે. એટલે કે બંનેની કળા સમન છે. અને તેથી તે બંને દોલનોનો પરિણામી વક્ર કે જે આકૃતિમાં તૂટક રેખા વડે દર્શવ્યો છે. તે મળે છે. જે બંને ગતિના વક્રોના સરવાળા બરાબર પ્રત્યેક તત્કાલ સમયને અનુરૂપ અક્ષોની ઉપર અને

નીચે રચાય છે. અને આ પરિણામી ગતિનું સ્વરૂપ તે બંને ગતિ જેવું જ હશે. પરંતુ તેનો કંપવિસ્તાર એ બંને ગતિન ઘટકોના સરવાળા બરાબર થશે.

(ii) જો કળાતફાવત **α = π , 3π , 5π** વગેરે એટલે કે **π** ના એકી ગુણાંકમાં હોય તો આપણે ઉપર મુજબ જે સમયને સાપેક્ષ સ્થાનાંતરનો વક્ર દોર્યો તેમાં પરિણામી વક્ર એ તત્કાલ સમયે દરેક ગતિના ઘટકોના સરવાળા બરાબર મળે છે. અહીં આ કિસ્સામાં તેનો કંપવિસ્તાર (a - b) દ્વારા મળશે. અને તે અક્ષની નજીકની તૂટક રેખાઓ વડે દર્શાવેલ છે. જ્યારે a = b થશે ત્યારે કંપવિસ્તાર શૂન્ય થશે અને તે વખતે ગતિ શૂન્ય થશે.

એકસાથે એકજ દિશામાં અને જેમની વચ્ચેનો કળાનો તફાવત ન હોય પરંતુ તેમની આવૃતિ વચ્ચે ફક્ત થોડો તફાવત હોય તેવી બે સા.પ્ર.ગ. દ્વારા કણ પર થતી અસર (Two Simple Harmonic Motions at upon A Particle Simultaneously in the Same Direction Having no Phase Difference But They Differ in Frequency by Very small Amount, 2.9):

બે સા.પ્ર.ગ.ની કણ પર થતી અસર નીચે પ્રમાણે દર્શાવાય છે.

$\boldsymbol{y_1 = a\sin\omega t = \text{asin } 2\pi n t}$ ------------- **(5)**

$\boldsymbol{y_2 = b\sin\omega_1\, t = b\sin 2\pi\,(\,n + \vartheta t)}$ ----------- **(6)**

જ્યાં $\boldsymbol{\omega = 2\pi n}$ અને $\boldsymbol{\omega_1 = 2\pi(n+\vartheta\,)}$, $\boldsymbol{\vartheta}$ એ બંને ગતિની આવૃતિનો તફાવત છે. $\boldsymbol{y_1}$ અને $\boldsymbol{y_2}$ એ તત્કાલ સમયે થતું બંને ગતિનું સ્થાનાંતર છે. અને a અને b એ તેના કંપવિસ્તાર છે. જેમાંના બીજી ગતિની આવૃતિ $\boldsymbol{\vartheta}$ જેટલી વધારે છે અને તેથી પરિણામી ગતિ નીચે મુજબ છે.

$\boldsymbol{y = \; y_1 + \; y_2}$

$\boldsymbol{= a\sin 2\pi nt + b\sin 2\pi nt\cos 2\pi\vartheta t + b\cos 2\pi nt\sin 2\pi\vartheta t}$

$\boldsymbol{= (\,a + b\cos 2\pi\vartheta t)\sin 2\pi nt + (\,b\sin 2\pi\vartheta t)\cos 2\pi nt}$

$\boldsymbol{= A\sin(\,2\pi nt + \in\,)}$ ---------- **(7)**

જ્યાં $\boldsymbol{a + b\cos 2\pi\vartheta t = A\cos\in}$ અને $\boldsymbol{b\sin 2\pi\vartheta t = A\sin\in}$

અને $\boldsymbol{A^2 = \; a^2 + \; b^2 + 2ab\cos 2\pi\vartheta t}$ ---------- **(8)**

$\boldsymbol{\in = tan^{-1}\,\frac{b\sin 2\pi\vartheta t}{a + b\,\cos 2\pi\vartheta t}}$ ----------------- **(9)**

અહીં સમી.(8)એ સમય આધારીત છે. અને આ કિસ્સામાં A એ પરિણામી ગતિનો કંપવિસ્તાર છે. સમી.(9) મુજબ $\in$ એ કળા તફાવત છે. અને તેના આ મૂલ્યોમાં સમયને સાપેક્ષ ફેરફાર થાય છે. સમી.(8)માં સમયનું જુદ્-જુદ્ મૂલ્ય મૂકતાં નીચે મુજબના પરિણામ મળે છે.

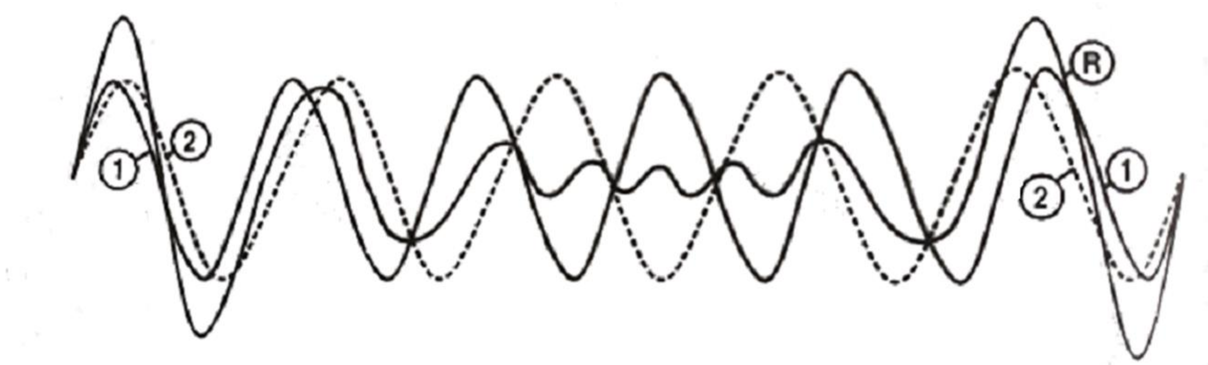
સમય	કંપવિસ્તાર A	A ની વર્તણૂક	બે ગતિ વચ્ચેનો તફાવત
0	**a + b**	મહતમ	
$\frac{1}{2\vartheta}$	**a – b**	ન્યુનતમ	
$\frac{1}{\vartheta}$	**a + b**	મહતમ	
$\frac{3}{2\vartheta}$	**a - b**	ન્યુનતમ	

$\frac{2}{\vartheta}$	a + b	મહતમ	

તેથી **t =0** સમયે **a =b** માટે પરિણામી ગતિ ઉત્પન્ન થાય છે. ત્યારે **a + b** અથવા **2a** જેટલા મૂલ્યનો પરિણામી કંપવિસ્તાર ઉદભવે છે. અને તે માટે સમય $\frac{1}{\vartheta}$ ના ક્રમીક અંતરાલ **0,** $\frac{1}{\vartheta}$, $\frac{2}{\vartheta}$ વગેરે હશે. તેમજ ન્યુનતમ કંપવિસ્તાર **(a-b)** અથવા **0** જ્યારે **a= b** થવાનો સમય $\frac{1}{2\vartheta}$, $\frac{3}{2\vartheta}$ વગેરે થશે અને તે પણ સમયના નિશ્રિત અંતરાલ $\frac{1}{\vartheta}$ ના ગુણાંકમાં હોય છે.

આમ, આ બે ગતિના કારણે ઉદભવતો પરિણામી ફેરફાર ઘણો સૂક્ષ્મ હોય છે. કારણ કે તેમની આવૃતિ વચ્ચેનો તફાવત ϑ એ ઘણો નાનો છે.

આમ, આ બે ગતિ કે જેમના ઘટકો વચ્ચેની આવૃતિનો તફાવત ઘણો નાનો હોય છે. તેના ઘટકોનો સમયને સાપેક્ષ સ્થાનાંતરણનો વક્ર એ નીચેની આકૃતિ-2 માં દર્શાવ્યા મુજબ આગળ દર્શાવ્યા મુજબ બંને ગતિના સ્થાનાંતરના ઘટકોના ભૌમિતિક સરવાળા બરાબર હોય છે.



આકૃતિ પરથી જોતાં જણાય છે કે કેટલાક પરિણામી દોલનોનો કંપવિસ્તાર મહતમ હોય છે. અને કેટલાકનો ન્યુનતમ હોય છે. બે મહતમ અથવા તો બે ન્યુનતમ વચ્ચેનો સમય અંતરાલ $\frac{1}{\vartheta}$ જેટલો હોય છે કારણે બંને ગતિ વચ્ચેનો આવૃતિ તફાવત ϑ છે તેથી મહતમ અને ન્યુનતમ ઉત્પન્ન થવા માતે પણ ϑ જેટલી આવૃતિનો તફાવત રહેલ છે.

એકજ સમયે એકબીજાને લંબરૂપે રહેલ અને એક સરખો આર્વતકાળ ધરાવતી પરંતુ જુદી જુદી કળા તફાવત ધરાવતી બે સા.પ્ર.ગ.ની એક કણ પર સંયુક્ત અસર(Composition of Two Simple Harmonic Motions Acting Upon a Particle Simultaneously at Right Angle To Each Other Same Time Period But Different in Phase. 2.10)

એક બીજાને કાટકોણે રહેલ બે સા.પ્ર.ગ.ની એક કણ પર થતી અસર નીચે મુજબ દર્શાવાય છે.

$x = a \sin(\omega t + \alpha)$ ---------- (10)

$y = b \sin \omega t$ ---------- (11)

જ્યાં $\omega = \frac{2\pi}{T}$, જ્યાં T એ આવર્તકાળ છે. અને α એ બે સા.પ્ર.ગ.નો તફાવત છે. તે બંને સા.પ્ર.ગ.ના કંપવિસ્તાર જુદા જુદા છે. જે અનુક્રમે a અને b વડે દર્શાવેલ છે.

હવે સમી.(10) અને સમી.(11) પરથી

$\frac{y}{b} = \sin \omega t$ --------- (12)

અને $\frac{x}{a} = \sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha$

અથવા $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \cos \alpha + \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\ sin\alpha$ ---------- (13)

અથવા $\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\ cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \sin \alpha$ -------- (14)

ઉપરના સમીકરણનો બંને બાજુ વર્ગ લઇ અને સાદુરૂપ આપતાં

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} cos\alpha = sin^2 \alpha$ ----------- (15)

અને આ સમી.(15) એ **2a** અને **2b** જેટલી બાજુઓ વાળા લંબચોરસ વડે ઘેરાયેલ અતિવૃતનું સમીકરણ છે.

વિશિષ્ટ કિસ્સા :

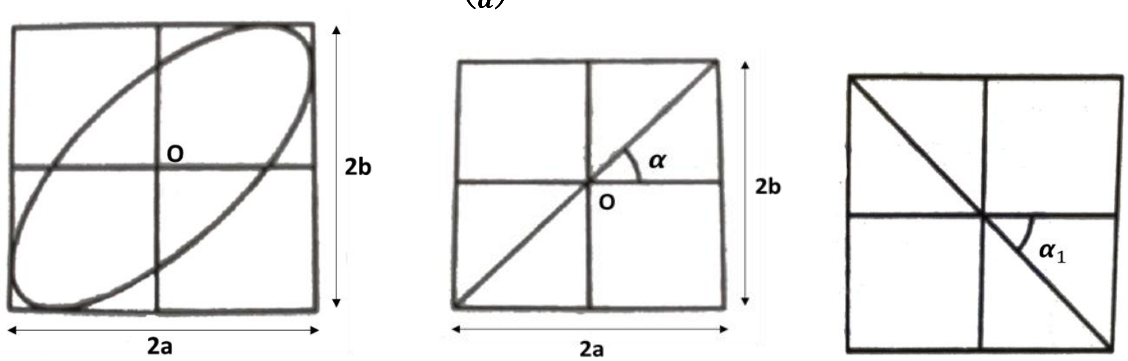
(a) જ્યારે કળાતફાવત $\alpha = 0$ હોય ત્યારે સમી.(15)નું સ્વરૂપ નીચે મુજબ થશે.

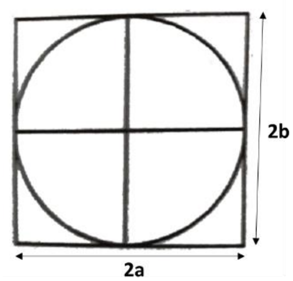
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} = 0$

અથવા $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0$ ------------ (16)

અથવા $y = \frac{b}{a} x$ --------- (17)

સમી. (17) એ એકબીજા પર એકરૂપ સ્થપાયેલ બે સુરેખાનું સમી. છે. અને તે અક્ષોના પ્રથમ અને તૃતિય ચરણમાં આવેલ હોય છે. અને તે એક સરખા સમય અંતરાલ માટે એક બીજાથી વિરૂધ્ધ દિશામાં બે વાર લંબાય છે. અને સમી.(17) એ સુરેખાનું સમીકરણ છે. અને તે ઉદગમબિદું માંથી પસાર થાય છે. અને તેનો ઢાળ X અક્ષને સાપેક્ષ $\alpha = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ થશે . જે નીચેની આકૃતિ-3(b)માં દર્શાવેલ છે.





(b) જ્યારે $\alpha = \pi$ ત્યારે સમી. (15) નીચે મુજબ થશે.

$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2 = 0$ અથવા $y = -\frac{b}{a}x$ ----------- (18)

સમી.(18) પણ બે એકબીજા પર સંપાત થયેલ સુરેખાનું સમી. દર્શાવે છે. જે ઉદગમબિંદુંમાંથી પસાર થાય છે. અને તે આલેખના બીજા અને ચોથા ચરણમાં આવેલ છે. અને તે પણ એકજ સમય અંતરાલમાં એકબીજાથી વિરૂધ્ધ દિશામાં બે વખત પસાર થાય છે. આ સુરેખાનો ઢાળ $\alpha_1 = tan^{-1}\left(-\frac{b}{a}\right)$ થશે. જે આકૃતિ-3( ) માં દર્શાવેલ છે.

(c) જ્યારે $\alpha = \frac{\pi}{2}$ હોય ત્યારે સમી.(15) નીચે મુજબ થશે.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ------------- (19)

અને આ સમી.(19) એ નિયમીત ઉઅપવલયનું સમી. છે કે જેની લઘુઅક્ષો a અને b એ અનુક્રમે યામાક્ષની અક્ષો x અને y પર રહેલ છે. જે આકૃતિ-3(d) માં દર્શાવેલ છે. અને વધુમાં જો a = b હોય તો સમી.(15)નું સ્વરૂપ વર્તુળના સમી. જેવું થશે એટલે કે

$x^2 + y^2 = a^2$ ----------- (20)

અને સમી.(20) એ વર્તુળ દર્શાવે છે જે આકૃતિ-3 (e)માં દર્શાવેલ છે.

(d) જ્યારે $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ત્યારે સમી.(15) નીચેના સ્વરૂપે થશે.

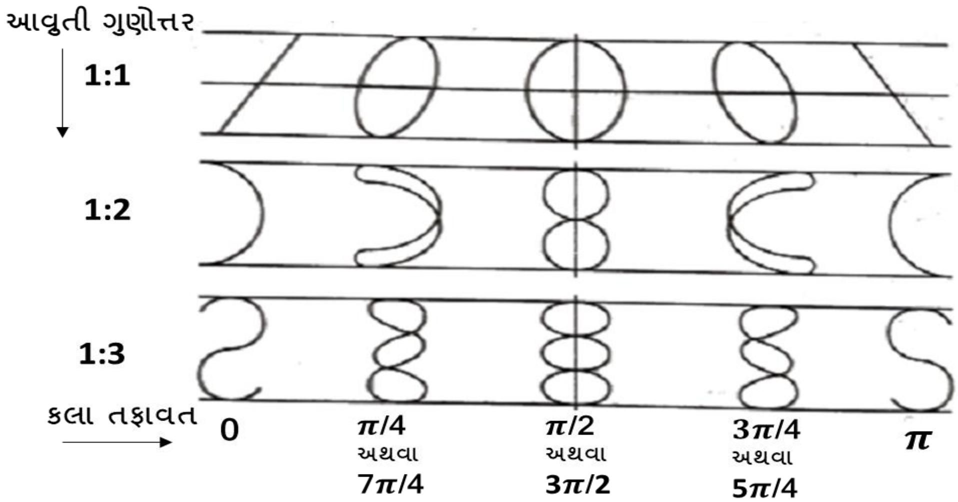
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \sqrt{2}\ \frac{xy}{ab} = \frac{1}{2}$ ------------ (21)

સમી.(21) એ એક ઢળતા ઉપવલય નું સમી. થશે. જે આકૃતિ-3(a) માં દર્શાવેલ છે.

લીસાજોસ આકૃતિઓ(Lissajous Figure 2.11) :

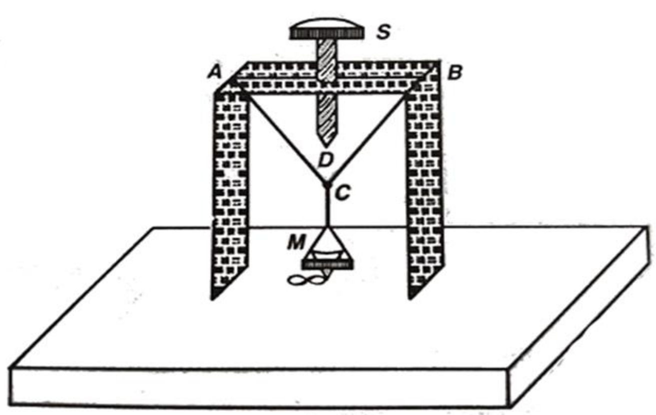
એકબીજાને લંબરૂપે રહેલ બે સા.પ્ર.ગ.ના પરિણામ સ્વરૂપે જે વક્રોની રચના થાય છે તેને લીસાજોસ આકૃતિઓ કહેવાય છે. અને આ વક્રોનો આકાર એ બંને ગતિના કંપવિસ્તાર, આવૃતિ અને પ્રારંભિક કળા તફાવત પર આધારીત હોય છે. અને આ રીતે જો બે સા.પ્ર.ગ. ની આવૃતિઓનો ગુણોતર **1:1 , 1:2 , 1:3,-----** વગેરે હોય અને તે એકબીજાને સાપેક્ષ લંબરૂપે ગતિ કરતી હોય તો બંનેના દોલનોની કળા નો તફાવત જ્યાં સુધી અચળ રહે છે ત્યાં સુધી નિશ્રિત આવૃતિના ગુણોતર માટે આ બંને ગતિના સંયુકત માર્ગના વક્રોનો આકાર અચળ રહે છે. અને આ બંને ગતિની સંયુકત અસર પરિણમી માર્ગના વક્રનો આકાર એ કળાના જુદા જુદા બદલાવ એટલે કે 0 થી $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$. માટે બદલાતો જશે. અને તેથી આવૃતિના જુદા જુદા ગુણોતર

1:1 , 1:2 , 1:3,----- વગેરે માટે એક સરખા કળા તફાવતો $0 \rightarrow 2\pi$ (0 થી 2π)સુધી માટે વક્રોના જુદા જુદા સમૂહો મળશે. જુદી જુદી કળાઓ માટે આવૃતિના ગુણોતર 1:1 , 1:2 , 1:3,----- વગેરે માટેના વક્રોના સમૂહો નીચેની આકૃતિ(4)માં દર્શાવ્યા છે.



પ્રાયોગીક રીતે લીસાજોસ આકૃતિઓ મેળવવાની રીત (Experimental Determination of Lissajous Figures):

(a) બ્લેક બર્નસ લોલક (Black Burns Pendulum):-



આકૃતિ(5)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક લાકડાની ઉર્ધ રહેલ ફ્રેમમાં રહેલ બે છિદ્રો A અને B વડે એક દોરીને Y આકારમાં બાંધેલ છે. આ દોરીના છેડાઓ ઉપરના સ્ક્રૂ S સાથે બાંધેલ છે અને તેન નીચેના છેડા સાથે એક ધાતુની વજનદાર રીંગ બાંધેલ છે. જેમાં એક ગરણી રાખેલ છે. અને આ ગરણીમાં બારીક રેતી ભરવામાં આવે છે. તેથી આ નીચેનો છેડો એ લોલકન ગોળા જેવી ગરજ સારે છે. આ પ્રકારની રચના એ બે પ્રકારના લોલક જેવુ કામ કરે છે. જો તેના છેડાને ઉર્ધ લાકડાની ફ્રેમ ની દિશામાં ખેંચી અને છોડવામાં આવે તો તેને કારણે જે સા.પ્ર.ગ. ઉત્પન્ન થશે તે એક સાદા લોલકની જેમ વર્તશે કે જે લોલકની લંબાઇ જેટલી થશે અને તે ફ્રેમની લંબાઇની દિશામાં દોલન કરશે. હવે જો આ છેડાને ફ્રેમને લંબ દિશામાં ખેંચી અને છોડવામાં આવે તો તે છેડાથી દોલન કરતા લોલક જેવું વર્તશે અને આમ, આ પ્રકારની રચના બે પ્રકારના લોલક જેવું

કાર્ય કરે છે. જેમનું એક ફ્રેમની લંબાઇની દિશામાં દોલન કરે છે. અને બીજુ તેની લંબાઇની લંબ દિશામાં દોલન કરે છે. તેથી જો તેની ગરણીમાં રેતી ભરવામાં આવે અને તેને આ રીતે દોલન કરવામાં આવે તો ગરણીના છેડામાંથી જે રેતી આ રચનાની નીચેની સપાટી પર પડશે તેના દ્વારા લીસાજૉસ આકૃતિની રચના થશે. અને આ રચનાની લંબાઇ માં ફેરફાર કરી અને આ બંને પ્રકારના સાથે થતા દોલનોની આવૃતિનો ગુણોતર **1:1 , 1:2 , 1:3,-----** વગેરે ગોઠવી શકાય છે. અને તેના દ્વારા લીસાજૉસ આકૃતિઓ મેળવી શકાય છે.

(b) કેથોડ રે ઓસીલોસ્કોપ (CRO)(Cathode Ray Oscilloscope)

લીસાજૉસ આકૃતિઓને દર્શાવવા માટે કેથોડ રે ઓસીલોસ્કોપ એક ઉતમ સઘન છે. CRO માટેની જરૂરીયાત નીચે મુજબ છે.

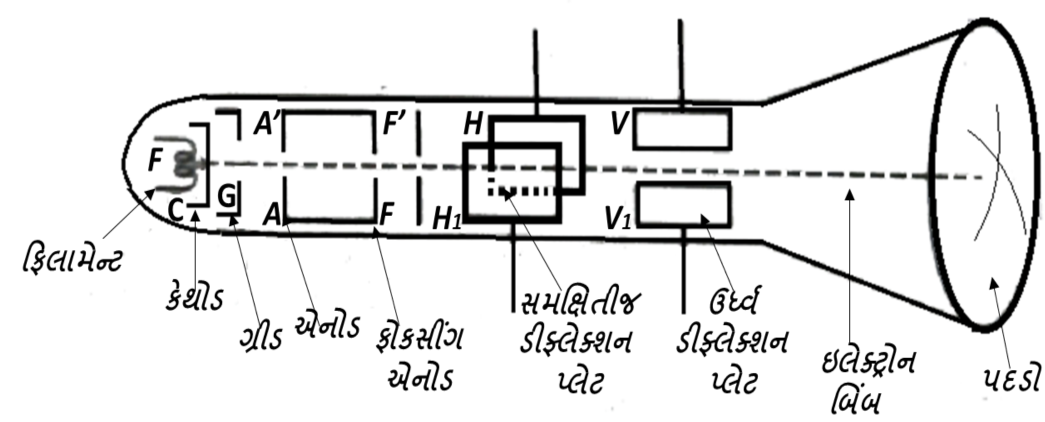
(i) એક કાચ કવર દ્વારા ઘેરાયેલ ઇલેકટ્રોન ગનની રચના

(ii) પાતળા પેન્સીલ જેવા આકારમાં ઇલેકટ્રોન કિરણોને કેન્દ્રીત કરવાની રચના.

(iii) ડીફલેકશન પ્લેટની રચના

(iv) એક પ્રસ્કુરક પડદો.

જુદા જુદા ઇલેકટ્રોડને આઘાર આપવા માટે એક કાચના બલ્બનું આવરણ આવેલ હોય છે. અને તેને શુન્યાવકાશ કરવામાં આવેલું હોય છે. જેમાં રહેલ ઇલેકટ્રોન ગનની રચના દ્વારા કેન્દ્રિત કરી શકાય તેવા ઇલેકટ્રોન બીંબને ઉત્પન્ન કરી શકાય છે. જે ઇલેકટ્રોન ગનમાં એક ફીલામેન્ટ દ્વારા ગરમ કરી શકાય તેવો કેથોડ આવેલ હોય છે. તેજ રીતે તેમાં કંટ્રોલ ગ્રીડ, ફોકસીંગ એનોડ અને ઇલેકટ્રરોન ને પ્રવેગીત કરવા માટેનો એનોડ આવેલ હોય છે. જેમાંનો ફોકસીંગ એનોડ એ બે ધાતુના નળાકારનો બનેલ હોય છે જે નળાકારનુ છીદ્ર મોટા એપાર્ચર રૂપે હોય છે અને તે ઇલેકટ્રોન ગનની ડીફલેકશન પ્લેટની રચનામાં બે જોડ પ્લેટો રહેલ હોય છે. જેમાંની એક જોડ સમક્ષીતીજ હોય છે અને બીજી જોડ લંબરૂપે રહેલી હોય છે. અને આ બલ્બનો કેથોડથી વિરુઘ્ઘ દિશાનો છેવાડાનો કાચનો પડદો એ પ્રસ્કુરક પદાર્થ વડે આવરણ ચડાવેલ હોય છે. આ પ્રસ્કુરક પદાર્થ તરીકે ઝીંક ઓકસાઇડ વાપરવામાં આવે છે.



આકૃતિ-(5)મા દર્શાવ્યા મુજબ એક ઇલેકટ્રોન બીંબ જે ફીલામેન્ટ દ્વારા કેથોડ ગરમ થવાથી ઉત્પન્ન થાય છે. તે ગ્રીડ દ્વારા પ્રવેગીત થઇ અને AA' માંથી પસાર થાય છે અને ફોકસીંગ અનોડ વડે કેન્દ્રીત થઇ અને સમક્ષીતીજ ડીફ્લેકશન પ્લેટ HH1 અને ત્યારબાદ લંબરૂપે રહેલ ડીફ્લેકશન પ્લેટમાંથી પસાર થઇ અને પ્રસ્ફુરક પડદા પર આ ઇલેકટ્રો પહોંચે છે.

હવે પ્લેટ HH1 પર ક્રમીક બદલતો AC વોલ્ટેજ આપવામાં આવેતે તેને કારણે આ ઇલેકટ્રોન બીમનું સમક્ષીતીજ વિતરણ થવાથી આપણને પડદા પર બિંદુની જગ્યાએ સમક્ષીતેજ રેખા જોવા મળશે. અને જો તેજે રીતે લંબરૂપે રહેલ પ્લેટની જોડ VV1 ને બદલાતો વોલ્ટેજ આપવામાં આવે તો પડદા પર લંબરૂપે રેખા જોવા મળશે. અને જો આ બંને લંબરૂપે રહેલ વિદ્યુતક્ષેત્રો ને એક્સાથે આપવામાં આવે તો પડદા પર લીસજોસ આકૃતો રચાશે.

(2) મુક્ત, અવમંદીત અને બળની અસર નીચેના દોલનો (**Free Damped and Forced Vibration)**

પ્રસ્તાવના **(Introduction):**

એક તંત્રમાં યાંત્રિક પ્રણાલી દ્વારા ઉતેજના ઉત્પન્ન થાય છે. અને આ ઉતેજીત બળ દૂર થતાં તેમાં કંપન ઉત્પન્ન થાય છે. આ પ્રકારના કંપનો સાદી પ્રસંવાદી ગતિ રૂપે હોય છે. અને તેને મુક્ત કંપનો અથવા પ્રાકૃતિક કંપનો કહેવાય છે. અને તંત્રના કંપન માટે લાગતા સમ્ય અંતરાલને પ્રાકૃતિક અંતરાલ કહેવાય છે.

કોઇ એક સાદા લોલકને આંદોલીત કરવામાં આવે કે એક સ્વરકાંટાને કંપીત કરવામાં આવે તો આ પ્રકારની પ્રણાલી અનંત સમય સુધી આંદોલીત કે કંપીત રહેતી નથી અને આવી પ્રણાલીના દોલનોનો કંપવિસ્તાર ધીમે ધીમે નાનો થતો જાય છે અને છેવટે તેના દોલનો બંધ થઇ જાય છે. આમ, થવાનું કારણ એ છે કે પ્રણાલીની આંતરીક સ્નિગ્ધતા કે ઘર્ષણ બળને કારણે આ દોલીત પ્રણાલી પર અવરોધક બળ લાગે છે. આ અવરોધક બલ એ પ્રણાલી આસપાસ રહેલ હવાના કારણે ઉત્પન્ન થાય છે. અને આ પ્રકારના ઘટતા કંપવિસ્તારવાળી ગતિને અવમંદિત દોલનો કહેવાય છે.

એક દોલીત પ્રણાલીના દોલનોમાં અવમંદન ને કારણે ઘટાડો થાય છે. તેના આ દોલનોની સ્થિરતા જાળવી રાખવા માટે પ્રણાલીના તંત્ર પર બાહ્ય આવર્ત બળ લાગુ પાડવું પડે. આમ, તંત્ર કે પ્રણાલી તેની પ્રાકૃતિક(કુદરતી) આવૃતિ સાથે દોલીત થવાનો પ્રયત્ન કરે છે અને તેના આ પ્રાકૃતિક દોલનો અવમંદીત બળને કારણે નાશ પામે છે. અને તેની પર બાહ્ય આવર્તબળ લાગુ પાડેલ હોવાથી તે બળના સમય અંતરાલ ને સાપેક્ષ દોલનો કરવા લાગે છે. આ પ્રકારના દોલનોને બળની અસર નીચેના દોલનો કહેવાય છે.

અચળ બળને કારણે થતી ગતિ (Motion Due to Constant Force,3.2)

ધારો કે એક કણ પર F જેટલા મૂલ્યનું અચળ બળ લાગતાં કણમાં સા.પ્ર.ગ. ઉદભવે છે. તો આ કણની ગતિનું સમીકરણ નીચે મુજબ થશે.

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+\mu y=F \qquad \text{---------} (1)$$

અહીં F એ કણ પર લાગતું અચળ બળ છે.

સમી.(1) ને નીચે મુજબ લખી શકાય

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=\frac{F}{m} \qquad \text{----------} (1.1)$$

જ્યાં $\omega^2=\frac{\mu}{m}$

અથવા $$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2\left(y-\frac{F}{m\omega^2}\right)=0 \qquad \text{---------} (2)$$

હવે $y-\frac{F}{m\omega^2}=Z$ લેતાં

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2Z=0 \qquad \text{--------} (3)$$

સમી.(3)નો ઉકેલ ગતિના વિકલ સમી. ના ઉકેલ પ્રમાણે નીચે મુજબ થશે.

$$Z=A\sin\omega t+B\cos\omega t \qquad \text{----------} (4)$$

અથવા $$y=\frac{F}{m\omega^2}+Asin\,\omega t+B\,cos\omega t \qquad \text{-----------} (5)$$

હવે પ્રારંભિક અવસ્થાની શરત લાગુ પાડતાં

t = 0 , y = y_0 અને $\frac{dy}{dt}=0$

તેથી $A=\frac{\vartheta}{\omega}$, $B=y_0-\frac{F}{m\omega^2}$ ----------- (6)

તેથી સમી.(5) નીચે મુજબ થશે.

$$y=\frac{F}{m\omega^2}+\frac{\vartheta}{\omega}\sin\omega t+\left(y_0-\frac{F}{m\omega^2}\right)\cos\omega t \qquad \text{----------} (7)$$

અને અચળ બળની અસર નીચે પ્રણાલીનું આંતરીક સ્થાનાંતર નષ્ટ થઇ અને તેની મધ્યસ્થ સ્થાયી અવસ્થમાં પરિણામે છે.

જો F =0 તો સમી.(7) નીચે મુજબ થશે.

$$y=\frac{\vartheta}{\omega}\sin\omega t+y_0\sin\omega t \qquad \text{---------} (8)$$

કે જે સાદી પ્રસંવાદી ગતિનો ઉકેલ થશે.

ક્ષણીક લાગુ પડતા બળની અસર મેળવવી (The Force acts for Short time and to Find its Effect, 3.3)

હવે જો t’ સમયે પ્રણાલી પર dt’ જેટલા સૂક્ષ્મ સમય માટે બળ F લાગુ પડે તો તેની t (t > t’) સમયે થતી અસર મેળવવા અગાઉ દર્શાવ્યા પ્રમાણે ગતિનું સમીકરણ નીચે મુજબનું થશે.

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=\frac{F}{m} \qquad \text{(જે સમી. 1.1 છે.)}$$

અહીં $\frac{F}{m}$ ની અસર સ્પષ્ટ રૂપે સમયનું વિધેય છેકે જે dt’ જેટલા સમયમાં ઉદભવે છે. અને t જેટલા સમયમાં ઉદભવતા વેગ $\frac{F}{m}dt'$ દ્વારા સ્થાનાંતર નીચે મુજબ થશે.

$$Y = \frac{F}{m\omega}\, dt' \sin(\, t - t') \qquad \text{--------- (9)}$$

અને તેથી t’ જેટલા સમયમાં થતી કુલ અસર નીચે મુજબ થશે.

$$y = \int_0^t \frac{F}{m\omega} \sin \omega\,(\, t - t')dt' \qquad \text{----------- (10)}$$

અહીં સરળતા ખાતર સંકલનની નીચેની લીમીટ સ્વાભાવીક રીતે t’ લેવાના બદલે શૂન્ય લીઘેલ છે. અને તેથી બળની આ સૂક્ષ્મ અસર્નું સંપૂર્ણ પરીણામ નીચે મુજબ થશે.

$$y = \ y_0 \cos \omega t + \frac{\vartheta}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{m\omega}\ \int_0^t F\, sin\omega(t - t')dt' \ \text{----------- (11)}$$

1/2π જેટલી આવૃતિ ધરાવતું પ્રસંવાદી બળ $F \sin pt$ દ્વારા એક કણ સા. પ્ર. ગ. અનુભવે છે.

તે માટે ગતિનું સમીકરણ નીચે મુજબ થશે.

$$m\ \frac{d^2\, y}{dt^2} + \ \mu\, y = F \sin pt \qquad \text{----------- (12)}$$

અને જો કણ પર કોઇ પ્રકારનું બળ ન લાગતું હોય તો $F \sin pt$ નું મૂલ્ય શૂન્ય થશે. આવા કિસ્સામાં સમી.(12)નો ઉકેલ નીચે મુજબ થશે.

$$y = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

જ્યાં $\omega^2 = \frac{\mu}{m}$

હવે જ્યારે કણ પર બળ લાગે છે ત્યારે સમી.(12) નીચે મુજબ થશે.

$$\frac{d^2\, y}{dt^2} + \ \omega^2\, y = f \sin pt \qquad \text{---------- (13)}$$

જ્યાં $f = \frac{F}{m}$

હવે જો આપણે એક કારક (operator) $D = \frac{d}{dt}$ દર્શાવીએ તો $\frac{d^2}{dt^2} = D^2$

તેથી સમી.(13)નું સ્વરૂપ નીચે મુજબ થશે.

$$(D^2 + \ \omega^2\,)y \ = f \sin pt$$

અથવા $y = \frac{f}{D^2+\omega^2} \sin pt$

અથવા $y = \frac{f}{\omega^2 - p^2} \sin pt$ ----------(14)

[$\because\ D\,(\sin pt) = p \cos pt\,,\ D^2\,(\sin pt) = D\cdot(\,D \sin pt) = D\,(\,p \cos pt) \ = -p^2 \sin pt$ અથવા $\therefore$ $D^2 = \,-p^2$]

અને આમ, જેમ જેમ પ્રણાલી પર બળ લાગતું જશે તેમ તેની પ્રાકૃતિક આવૃતિ ω નાશ પામતી જશે. પરતુ તે લાગુ પાડેલ બળની આવૃતિ p/2π જેટલી અવૃતિએ કંપન કરવા લાગશે.

અને જો પ્રણાલીની આવૃતિ અને તેને લાગુ પાડેલ બળની આવૃતિ સમાન થાય $\omega = p$ તો કંપનનો કંપવિસ્તાર $\frac{f}{\omega^2 - p^2}$ નું મૂલ્ય અનંત થઇ જાય છે.અને તેથી પ્રણાલી ભાંગી પડે છે.

અવરોધીય માધ્યમમાં ગતિ (Motion in A Resisting Medium,3.5)

જો એક સાદા લોલકને આંદોલીત કરવામાં આવે અથવા એક સ્વરકાંટાને કંપીત કરવામાં આવે તો આ પ્રકારની પ્રણાલીમાં દોલનો કે કંપનો અનંત સમય સુધી ચાલુ રહેતા નથી અને પ્રણાલીના દોલનો કે કંપનો નો કંપવિસ્તાર ધીમે ધીમે ઘટતો જાય છે અને છેવટે તેમની ગતિ અટકી જાય છે આમ, થવાનું કારણ એ છે કે કોઇક અવરોધક બળ પ્રણાલી પર લાગુ પડતું હોય છે. આ પ્રકારની ગતિને અવમંદીત દોલનો કહેવાય છે.

હવે જો એક કણનું દ્રવ્યમાન m હોય અને કોઇ એક નિશ્રિત બિંદુને સાપેક્ષ તેમની પર લાગતા બળને કારણ તે અવરોધક બળની અસર નીચે એક સ્થિત બિદું થી તે કણ ગતિ કરવાનું ચાલુ કરે છે. તો તેની પર અવરોધને કારણે લાગતુ બળ એ કણના વેગના નજીવા મૂલ્યને અનુરૂપ કણના વેગને સમપ્રમાણ માં હોય છે.

આ પ્રકારના m જેટલા દ્રવ્યમાનવાળા કણનું ગતિનું સમી. નીચે મુજબ થશે.

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\mu y - R \frac{dy}{dt} \quad \text{-----------} \ (15)$$

અથવા $$\frac{d^2 y}{dt^2} + k \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0 \quad \text{-----------} \ (16)$$

જ્યાં μ એ અચળાંક છે અને તેને દ્રઢતાઅંક અથવા તો સ્પ્રીંગ ફેકટર કહેવાય છે. અને R ને એકમ વેગ માટેનું ઘર્ષણબળ કહેવાય છે. અને અહીં K એ ઘર્ષણનો નિયતાંક છે અને તે $\frac{R}{m}$ અથવા $\omega^2 = \frac{\mu}{m}$ દર્શાવે છે. ઉપરના સમીકરણો એ અવમંદનની અસર નીચે થતા દોલનો દર્શાવે છે અને તેનો ઉકેલ નીચેના સ્વરૂપે મળશે. જોઇએ,

$$Y = A_1 e^{pt} \quad \text{તેથી} \quad \frac{dy}{dt} = p A_1 e^{pt} \quad , \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = p^2 A_1 e^{pt} = p^2 y$$

તેથી સમી.(16) માં આ મૂલ્યો મૂકતાં,

$$(p^2 + Kp + \omega^2)\, y = 0 \quad \text{---------} \ (17)$$

અથવા $$p^2 + Kp + \omega^2 = 0 \quad \text{---------} \ (18)$$

અને $$p = -\frac{K}{2} \pm \sqrt{\frac{K^2}{4} - \omega^2}$$

અથવા $$Y = e^{-\frac{Kt}{2}} \left(A\, e^{\sqrt{\frac{K^2}{4} - \omega^2}} \cdot t + B\, e^{-\sqrt{\frac{K^2}{4} - \omega^2}} \cdot t \right) \quad \text{---------} \ (19)$$

જ્યાં A અને B એ બંને સ્વતંત્ર અચળાંકો છે. સમી.(19) દ્વારા જે p નું મૂલ્ય દર્શાવ્યું છે એ જમણી બાજુના કૌંસમાં આપેલ પદની નિશાની ની અભિવ્યકિત પર આધારીત છે.

કિસ્સો-1 જો $\frac{K^2}{4} > \omega^2$ એટલે કે $\sqrt{\frac{K^2}{4} - \omega^2}$ એ વાસ્તવિક મૂલ્ય છે. અને તે માટે y નું મૂલ્ય કે જે બે ઘટકો ધરાવે છે તે બંને ઘટકો ચરઘાતાંકીય રીતે શૂન્ય થઇ જશે. અને આવી ગતિનું ઉતમ ઉદાહરણ એ અતિ અવમંદીત થયેલ ડેડબીટ ગેલ્વેનોમીટર છે. કે જેમાં આવર્તન ત્વરીત શૂન્ય થઇ જાય છે. આ પ્રકારના કિસ્સા માટે દોલનોનું સ્થાનાંતર y વિરૂધ્ધ સમય t નો આલેખ નીચેની આકૃતિ(1)માં દર્શાવેલ છે.

Fig.-1

કિસ્સો-2 જો $\frac{K^2}{4} = \omega$ તો તેને જટીલ અવમંદન કહેવાય છે. અને તે માટે y નીચે મુજબ થશે.

$$y = (A + Bt)e^{-\frac{K}{2}t}$$

અને આવા કિસ્સામાં ઘટાડો ત્વરીત થશે અને જો ω નું મૂલ્ય K કરતાં થોડુંક વધારે હોય તો ગતિ દિલીત થઇ જાય છે અને જો ω નું મૂલ્ય K કરતા થોડુંક ઓછું હોયતો ગતિ ત્વરીત બંધ થઇ જાય છે. તેથી આ અવસ્થા જટીલ(critical) અવમંદીત અવસ્થા છે આ પ્રકારની ગતિ માટે દોલનોના સ્થાનાતર y વિરુધ્ધ સમય t નો આલેખ આકૃતિ(2)માં દર્શાવેલ છે.

Fig.-2

કિસ્સો-3 જો $\frac{K^2}{4} < \omega$ તો સમી.(19)નું કૌંસમાં આપેલ પદ કાલ્પનીક થઇ જશે. અને તેથી ગતિ દોલન સ્વરૂપે મળશે. અને તેથી સમી.(19) નુ કૌંસમાં આપેલ પદ નીચે મુજબ મળશે.

$$\sqrt{\frac{K^2}{4} - \omega^2} = i\sqrt{\omega^2 - \frac{K^2}{4}} = i\omega_1 \qquad \text{જ્યાં } \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \frac{K^2}{4}}$$

તેથી સમી. (19) નીચે મુજબ થશે.

$$y = e^{-\frac{K}{2}t}\left(Ae^{i\omega_1 t} + B\,e^{-i\omega_1 t}\right)$$

$$= e^{-\frac{K}{2}t}\{(A + B)cos\omega_1 t + i\,(A - B)sin\omega_1 t\}$$

$$= e^{-\frac{K}{2}t}\left(A_1 \cos\omega_1\, t + B_1\, sin\omega_1\, t\right) \qquad \text{-----------(20)}$$

$$= e^{-\frac{K}{2}t}\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\; sin\left(\omega_1\, t + tan^{-1}\frac{A_1}{B_1}\right)$$

જ્યાં A_1 અને B_1 એ અચળાકો છે. અને $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \frac{K^2}{4}}$

અહીં ω_1 એ પ્રણાલીની પ્રાકૃતિક આવૃતિ રૂપે વર્તે છે. અને અવમંદનના મૂલ્યમાં થોડો વધારો થતાં આવૃતિનું મૂલ્ય ઘટતું જાય છે. અને તેથી પ્રણાલીના દોલનોનો કંપવિસ્તાર $\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\, e^{-\frac{K}{2}t}$ ના મૂલ્યમાં સમયને સાપેક્સ ચરઘાતાંકીય ઘટડો થતો જશે અને તેથી પ્રણાલીમાં અવમંદીત દોલનો ઉત્પન્ન થશે. અને આ પ્રકારની ગતિ માટે સમય t ને સાપેક્ષ સ્થાનાંતર y નો ભૌમિતિક સંબંધ સાદી પ્રસંવાદી ગતિ જેવો હશે જે નીચેની આકૃતિ-3માં દર્શાવેલ છે.

Fig.-3

આકૃતિ-3માં જોતા જણાય છે કે જેમ સમય વધતો જાય છે તેમ કંપવિસ્તાર $\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\ e^{-\frac{K}{2}t}$ ચરઘાતાંકીય રીતે ઘટીને શૂન્ય થાય છે અને કંપવિસ્તરના અવમંદનનું માપન એ અવમંદનઆંક K છે. હવે જો કોઇ એક સમય t એ મહતમ સ્થાનાંતર નીચે મુજબ મળે છે.

$$y_1 = ae^{-\frac{K}{2}t}$$

જ્યાં $\sqrt{A_1^2 + B_1^2} = a$ લીધેલ છે.

$sin(\omega_1\, t + \in) = \pm 1 \qquad \in = tan^{-1}\, \frac{A_1}{B_1}$

ક્યારે સ્થાનાંતર મહતમ હોય છે ?

આવર્તકાળ T ના ક્રમીક અંતરાલએ એક દિશામાં થતા મહતમ સ્થનાંતરો y_1, y_2, y_3,.......વગેરે દ્વારા દર્શાવાય છે. તેથી

$$y_2 = ae^{-\frac{K}{2}(t+T)}$$

$$y_3 = ae^{-\frac{K}{2}(t+2T)}$$

$$y_4 = ae^{-\frac{K}{2}(t+3T)}$$

તેથી $\frac{y_1}{y_2} = \frac{ae^{-\frac{K}{2}t}}{ae^{-\frac{K}{2}(t+T)}} = e^{\frac{K}{2}T}$

તેજ રીતે $\frac{y_2}{y_3} = e^{\frac{K}{2}T}$

અથવા $\frac{y_3}{y_2} = e^{\frac{K}{2}T}$

તેથી $\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3} = \cdots\ldots\ldots\ldots. = D = e^{\frac{K}{2}T}$

હવે બંને બાજુ લોગ લેતાં,

$$K = \frac{2}{T}\log_e D = \frac{2\times 2.303}{T}\log_{10} D$$

અને અવમંદિત દોલનોની પ્રણાલી માટે આ K ને લોગ-ડીક્રીમેન્ટ કહેવાય છે.(ચરઘાતાંકીય ઘટાડો) કહેવાય છે. અને આ રીત દ્વારા અવમંદન આંક મેળવી શકાય છે.

END NEP SYLLABUS

બળની અસર નીચેના દોલનો (Forced Vibration,3.6(a)) (Extra)

કોઇ એક કણ પર F જેટલા મૂલ્યનું p/2π જેટલી દોલન આવૃતિ ઘરાવતું બળ લાગુ પડે અને તેને કારણે કણનું અવરોધીય માધ્યમમાં સાદી પ્રસંવાદી ગતિ કરે તો આ m દ્રવ્યમાન ઘરાવતા કણની ગતિ નું સમીકરણ નીચે મુજબ થશે.

$m \frac{d^2y}{dt^2} = f sin\, pt - \mu\, y - R\, \frac{dy}{dt}$ ------------(21)

અથવા $\frac{d^2\, y}{dt^2} + K\, \frac{dy}{dt} + \omega^2\, y = f\, sinpt$ ------------(22)

જ્યાં અવમંદન આંક $K = \frac{R}{m}$ અને $\omega^2 = \frac{\mu}{m}$, μ એ દ્રઢતાંક અથવા તો સ્પ્રીંગ અચળાંક છે અને $\frac{\omega}{2\pi}$ એ પ્રણાલીની પ્રાકૃતિક આવૃતિ છે અને $f = \frac{F}{m}$ છે.

હવે જો આ કણની પ્રણાલી એ તેની પર કોઇ બાહ્ય બળ આપ્યા વગરની અવમંદન ઘરાવતી સામાન્ય દોલીત પ્રણામી હોય તો તે માટે સમી.(22)નો ઉકેલ નાચે મુજબ થશે.

$e^{-\frac{K}{2}t}\,(A_1 \cos \omega_1\, t + B_1\, sin\omega_1\, t)$

જ્યાં $D = \frac{d}{dt}$ અને $y = \frac{f\sin pt}{D^2+KD+\omega^2}$ --------(23)

હવે D^2 ને બદલે $-p^2$ લખતાં,

$y = f\, \frac{sinpt}{(\omega^2 - p^2\,)+KD}$

અને $y = \frac{f[(\omega^2 - p^2\,)-KD]sinpt}{[(\omega^2 - p^2\,)-K^2D^2]}$

$= \frac{f[(\omega^2-p^2)sinpt-Kpcospt]}{[(\omega^2-p^2)+K^2p^2]}$

જો $\omega^2 - p^2 = A_1 cos \in$ ------------(24)

K p = $A_1 sin \in$ -----------(25)

$\therefore\; A_1 = [(\omega^2 - p^2) + K^2p^2]^{1/2}$ -----------(26)

અને $\in = tan^{-1}\, \frac{Kp}{\omega^2-p^2}$ --------(27)

$y = \frac{fsin(pt-\in)}{[(\omega^2-p^2)^2+K^2p^2]^{1/2}}$ ----------------------(28)

$= \frac{Fsin(pt-\in)}{m[(\omega^2-p^2)^2+K^2p^2]^{1/2}}$ --------------(29)

$= \frac{F}{pZ}\, \sin(pt-\in)$ -------------(30)

જ્યાં $Z = \frac{m}{p}\left[\left(\omega^2 - p^2\right)^2 + K^2p^2\right]^{1/2}$ ------------(31)

$= \left[m^2\, \left(\frac{\omega}{p} - \frac{p}{\omega}\right)^2\, \omega^2 + R^2\right]^{1/2}$ ----------------(32)

અહીં K m = R

અને $Z = \left[\left(\frac{m\omega^2}{p} - mp\right)^2 + R^2\right]^{1/2}$ -------------(33)

$= \left[\left(\frac{\mu}{p} - mp\right)^2 + R^2\right]^{1/2}$ ----------------------------(34)

$= \sqrt{X^2 + R^2}$ ----------------(35)

જ્યાં $X = m\omega\left(\frac{\omega}{p} - \frac{p}{\omega}\right) = \left(\frac{\mu}{p} - mp\right)$ -------------(36)

તેથી , $y = \frac{F}{p\sqrt{X^2+R^2}}\sin(pt-\in)$ ----------------(37)

$\therefore y = \frac{F}{pZ}\sin(pt-\in)$ --------------(38)

જ્યાં Z એ યાંત્રિક અવબાધ તરીકે ઓળખાય છે. અને $Z = \sqrt{X^2 + R^2}$ માં X એ પ્રતિક્રિયા અને R એ અવરોધ છે.

(i) જો μ નું મૂલ્ય મોટું હોય તો Z નું મૂલ્ય $\frac{\mu}{p}$ ના પ્રમાણમાં ઘટી જશે. અને પ્રણાલીની જડતા નિયંત્રિત કહેવાય છે.

(ii) જો R નું મૂલ્ય મોટું હોય તો જ્યારે Z એ R બરાબર થાય છે. ત્યારે પ્રણાલી અવરોધ દ્વારા નિયંત્રિત કહેવાય છે.

(iii) જો m નું મૂલ્ય મોટું હોય તો Z નું મૂલ્ય m p જેટલું થશે ત્યારે પ્રણાલી નું કદ નિયંત્રિત થયેલ કહેવાય છે.

કંપવિસ્તારનો અનુનાદ: પ્રણાલીનુ મહતમ સ્થાનાંતર(Amplitude Resonance: Maximum Displacement of The System, 3.7)

જ્યારે બળની આવૃતિના દોલનો એટલે કે $[(\omega^2 - p^2)^2 + K^2p^2]^{1/2}$ નું મૂલ્ય ન્યુનતમ થાય છે ત્યારે **p** નું મૂલ્ય સમી.(28) મુજબ ન્યુનતમ થાય છે. અને એ વખતે સ્થાનાંતરનો કંપવિસ્તાર મહતમ થાય છે.

અથવા $\frac{d}{dp}[(\omega^2 - p^2)^2 + K^2p^2]^{1/2} = 0$

અથવા $\frac{1}{2}[(\omega^2 - p^2)^2 + K^2p^2] - \frac{1}{2}\ [-4p(\omega^2 - p^2) + 2K^2 p] = 0$

અથવા $2K^2 p = 4p(\omega^2 - p^2)$

અથવા $p = \sqrt{\omega^2 - \frac{K^2}{2}}$ ----------------(39)

અને આ. સમી.(39) એ કંપવિસ્તારના અનુનાદ માટેની શરત છે તેથી જ્યારે બળની આવૃતિ $\frac{p}{2\pi}$ નું મૂલ્ય $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\omega^2 - \frac{K^2}{2}}$ જેટલું થશે એટલે કે બળની આવૃતિનું મૂલ્ય પ્રાકૃતિક આવૃતિ $\frac{\omega}{2\pi}$ થી થોડું ઓછું થશે. એટલેકે તે અવમંદીત પ્રણાલી ની આવૃતિ $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\omega^2 - \frac{K^2}{4}}$ ની નજીકનું મૂલ્ય પ્રાપ્ત કરશે. જેમ કે $\omega^2 \gg \frac{K^2}{2}$ તો $p = \omega$ જેથી

$y_{max} = \frac{f}{K\omega}$ ----------------(40)

અને આમ, થવાથી સ્થાનાંતરણનો કંપવિસ્તાર મહતમ આકૃતિ-4માં કંપવિસ્તારમાં થતો ફેરફાર દર્શાવેલ છે. જે બળની આવૃતિની અવમંદીત કળામાં થતા ફેરફારને સાપેક્ષ કંપવિસ્તારનો ફેરફાર દર્શાવે છે. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ K = 0 માટે કંપવિસ્તાર અનંત થઇ જાય છે તે હકિકતમાં શકય નથી કારણકે K નું મૂલ્ય કદી પણ શૂન્ય થતું નથી અને k ના નિશ્રિત મૂલ્ય માટે એટલે કે $p = \omega$ એ કંપવિસ્તાર મહતમ થાય છે.

પ્રણાલીની મહતમ શક્તિ: વેગનો અનુનાદ(Maximum Energy of The System: Velocity Resonanace,3.8)

કોઇ ચલિત પ્રણાલીની શક્તિ ત્યારે મહતમ હોય છે કે જ્યારે ચલિત પ્રણાલીની અવમંદન સહિત આવૃતિ એ તેને ચાલક આવૃતિ બરાબર થાય એટલે કે $\omega = p$ થાય. આ ઘટનાને વેગનો અનુનાદ અથવા તો શક્તિનો અનુનાદ કહેવાય છે. સમી.(31) અને સમી.(37) પરથી,

$$\frac{f}{\sqrt{\{(\omega^2-p^2)^2+K^2p^2\}}} = \frac{F}{p\sqrt{\left\{m^2\left(\frac{\omega}{p}-\frac{p}{\omega}\right)^2\omega^2+R^2\right\}}}$$

$$= \frac{f}{pZ} = \frac{F}{p\sqrt{X^2+K^2}}$$

જ્યાં એ યાંત્રિક પ્રતિક્ર્યા છે અને $X = m\left(\frac{\omega}{p} - \frac{p}{\omega}\right)\omega$ અને તેને (Lack of coincidence) સંયોગનો અભાવ અથવા (mistuning) ગેરબંધારણીય રૂપે ગણવામાં આવે છે. ની જુદી જુદી કિંમતો માટે શક્તિ માં ને સાપેક્ષ થતા ફેરફારના વક્રો એ આકૃતિ-5 માં દર્શાવેલા છે.

અહીં કુલ શક્તિનું મૂલ્ય મહતમ ગતો શક્તિ જેટલું હોય છે.

$$\therefore E = \frac{m}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2_{max}$$

$$= \frac{m}{2}\left\{\frac{Fpcos(pt-\in)}{p\sqrt{X^2+R^2}}\right\}^2_{max}$$

$$= \frac{m}{2}\ \frac{F}{X^2+R^2}$$ -----------(41)

જ્યારે $(pt-\in) = \pm 1$ એટલે કે $pt-\in$ નુ મૂલ્ય મહતમ થાય છે. તેમ X = 0 અથવા તો $p = \omega$ થશે અને શક્તિ નું મૂલ્ય મહતમ થશે. અને ત્યારે આ બે આવૃતિઓના સંયોગના અભાવ (Lack of coincidence)ના કારણે શક્તિ માં ઘટાડો થશે.

હવે સમી.(41) પરથી જ્યારે, X = 0 , $p = \omega$ ત્યારે

$$E_{max} = \frac{m}{2}\ \frac{f^2}{K^2} = \frac{m}{2}\ \frac{F^2}{R^2}$$ --------------(42)

તેથી , $\frac{E}{E_{max}} = \frac{R^2}{X^2+R^2}$ -----------(43)

જ્યારે અવમંદનની બધીજ કિંમતો માટે, X = 0 , $p = \omega$ અને $\frac{E}{E_{max}} = 1$ થાય ત્યારે તેને શક્તિના અનુનાદની શરત કહેવામાં આવે છે. જ્યારે X નું મૂલ્ય ખુબજ મોટું હોય ત્યારે R ના નાના મૂલ્ય માટે $\frac{E}{E_{max}} = 0$ થશે.

અનુનાદની તિક્ષ્ણતા (Sharpness of Resonance):

બળની આપેલ આવૃતિ એ શક્તિમાં થતો અપૂર્ણાંક ઘટડો અને મીસટ્યુનીંગ ના વર્ગના ગુણોતરને અનુનાદ ની તિક્ષ્ણતા (sharpness of resonance) કહેવાય છે.

∴ તિક્ષ્ણતા $S = \frac{1}{X^2}\frac{E_{max}-E}{E} = \frac{1}{X^2}\left(\frac{E_{max}}{E} - 1\right)$

$= \frac{1}{X^2}\left(\frac{X^2+R^2}{R^2} - 1\right) = \frac{1}{R^2}$ -----------(44)

Rની જુદી જુદી કિંમતો માટે $\frac{E}{E_{max}}$ માં X ને સાપેક્ષ થતો ફેરફાર આકૃતિ-6માં દર્શાવેલ છે. જ્યારે $\omega > p$ હોય છે ત્યારે X નું મૂલ્ય ઉપરથી નીચે તરફ આવતા ઘટે છે. અને $\omega < p$ નું મૂલ્ય ઘન હોય છે. જ્યારે હોય છે. ત્યારે X નું મૂલ્ય ઋણ હોય છે.

જ્યારે આવૃતિની ચોકસાઇ ω અને p જેટલી ઉદભવે છે. ત્યારે અનુનાદનું અવલંબન બળના દોલનો પર વધારે જોવા મળે છે. અને એ વખતે અનુનાદ તિક્ષ્ણ થાય છે.

આકૃતિ-6 પરથી જોઇ શકાય છે કે અવમંદનના ઉચ્ચા મૂલ્ય (આકૃતિનો સૌથી ઉપરનો વક્ર) માટે X ના મૂલ્યમાં X=0 ની આસપાસ થતા ફેરફાર દ્વારા $\frac{E}{E_{max}}$ ના મૂલ્યમાં સૂક્ષ્મ ફેરફાર થાય છે અને આ કિસ્સાને સપટ અનુનાદ કહેવાય છે. અને અવમ6દનના નીમ્ન મૂલ્ય (આકૃતિનો સૌથી નીચેનો વક્ર) માટે X ના મૂલ્યમાં X=0 ની આસપાસ થોડો પણ ફેરફાર થય તો $\frac{E}{E_{max}}$ ના મૂલ્યમાં મોટો ફેરફાર થાય છે અને તિક્ષ્ણ અનુનાદ ઉદભવે છે.

અનુનાદની આ તિક્ષ્ણતાનું પ્રાયોગીક રીતે અવલોકન કરવા માટે પાતળી કે જાડી દોરી ધરાવતા સોનોમીટરની ધ્વનિ પેટી પર એક કંપીત સ્વરકાંટાને રાખવાથી કરી શકાય છે. અને તેમાં જો પાતળી દોરી રાખેલ હોય તો તેમાં રાખેલ (પેપર રાઇડર) પેપર અસ્વાર જ્યારે ચોક્કસ અનુનાદ થશે ત્યારેજ દોરી પરથી ફેંકાઇ જશે. પરંતુ જો જાડી દોરી રાખેલ હોય તો અનુનાદની ઘટના બને તે પહેલા પણ પેપર અસ્વાર ફેંકાઇ જાય છે. કારણ કે આ કિસ્સામાં અવમંદન વધારે થતુ હોય છે તે જ રીતે અનુનાદ નળીના પ્રયોગમાં જ્યારે કંપિત સ્વરકાંટાને નળીના ઉપરના ખુલ્લા ભાગ પર રાખવામાં આવે છે ત્યારે તેમાંથી અનુનાદને ચોક્કસ લંબાઇ પહેલા અવાજ સંભળાવા લાગે છે કારણે કે હવાના સ્તંભ દ્વારા થતું અવમંદન ખૂબજ વધારે હોય છે.

બળના કંપનની કળા (Phase of The Forced Vibration,3.9):

સ્થિત ગતિની કળા નીચે મુજબ દર્શાવાય છે.

$\in = tan^{-1}\frac{Kp}{\omega^2-p^2}$ અથવા $\frac{Kp}{\omega^2-p^2} = \tan\in$

તે માટે ત્રણ કિસ્સા ઉદભવી શકે,

(i) જો $p < \omega$ તો $\in$ નું મૂલ્ય ધન થશે અને તે મૂલ્ય K ની દરેક કિંમત માટે 0 અને π/2 વચ્ચે રહેશે.

(ii) જો $p > \omega$ તો $\in$ નું મૂલ્ય ઋણથશે અને તે મૂલ્ય K ની દરેક કિંમત માટે π/2 અને π વચ્ચે રહેશે.

(iii) જો $p = \omega$ તે કિસ્સા માટે K ની દરેક કિંમત માટે $\in = \pi/2$ થશે અને અનુનાદ થશે.

જ્યારે અવમંદન ઓછું હોય અને $p < \omega$ હોય ત્યારે $\in$ નું મૂલ્ય શૂન્ય થવા તરફ જાય છે. અને જ્યારે $p > \omega$, $\in$ નું મૂલ્ય π તરફ જાય છે. અને આમ, પ્રથમ કિસ્સામાં સ્થાનાંતર ની કળા એ બળની કળા જેવી જ હશે. અને ત્યાર બાદના કિસ્સામાં સ્થાનાંતરની કળા બળની કળાથી વિરુધ્ધ હશે. એટલે કે π જેટલી અને જ્યારે અનુનાદ થાય છે. ત્યારે કળા તફાવત π/2 થાય છે એટલેકે $p = \omega$ થાય ત્યારે તે π/2 થાય છે.

બળની સ્થિત અવસ્થાના દોલને શક્તિ ઉદભવસ્થાન (Power Supply at Steady State of Forced Vibration,3.10)

કોઇ પન સમયે શક્તિના પુરવઠાનો દર એટલે કે પ્રણાલી પર બળપૂર્વક કાર્ય કરી પ્રણાલીને શક્તિ અવસ્થામાં લાવવામાં આવતી શક્તિ નીચે મુજબ થશે.

શક્તિ P =કાર્યનો દર $=\frac{dW_1}{dt}$ =બળ X વેગ

$= F \sin pt \cdot \frac{dy}{dt}$

હવે સમી.(37) પ્રમાણે , $y = \frac{F}{pZ} \sin(pt - \in)$

∴ શક્તિ P = $F \sin pt . \frac{Fp}{pZ} \cos(pt - \in)$

$= \frac{F^2}{Z} \sin pt \cos(pt - \in)$

હવે સમગ્ર સમય અંતરાલ માટે સરેરાશ લેતા,

$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt$

$= \frac{F^2}{Z} \frac{1}{T} \int_0^T sinpt \cos(pt - \in) dt$

$= \frac{1}{2} \frac{F^2}{Z} sin \in$

જો $\in = 0, P_{av} = 0$

$P_{av} = \frac{1}{2} \frac{F^2}{Z^2} R$ ------------(45)

જે રીતે $\sin \in = \frac{Kp}{\left[(\omega^2 - p^2)^2 + K^2 p^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{Kmp}{pZ} = \frac{R}{Z}$

તેજ રીતે તંત્ર દ્વારા ખર્ચતા બળ દ્વારા થતાં કાર્યનો દર, એટલે કે ખર્ચતા બળ દ્વારા થતા કાર્ય W_2 દ્વારા થતો શક્તિનો વ્યય

$P' = \frac{dW_2}{dt}$ =બળ X વેગ = $R \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} = R \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$

$= \frac{RF^2}{Z^2} \cos^2(pt-\in)$

એક દોલન માટેનો સરેરાશ $P'_{av} = \frac{RF^2}{Z^2} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(pt-\in)dt$

$= \frac{F^2 R}{2Z^2}$ -------------------(46)

સમી.(45) મુજબ ચાલક બળ દ્વારા આપવામાં આવતી શક્તિનો દર એ સમી946) મુજબના ઘર્ષણ બળ દ્વારા ખર્ચાતી શક્તિ P'_{av} બરાબર હોય છે.

જ્યારે અનુનાદ ઉદભવે એટલે કે $p = \omega$ ત્યારે X = 0 તેથી Z = R અને સરેરાશ શક્તિ $\frac{1}{2} \frac{F^2 R}{Z^2}$ એ $\frac{F^2}{2R}$ થશે. અને જ્યારે સરેરાશ શક્તિનું મૂલ્ય અડધું થશે. ત્યારે અનુનાદ વખતેના તેના આ મૂલ્યને સાર્વત્રિક રીતે અર્ધ શક્તિ મૂલ્ય (half power value) તરીકે ઓળખાય છે.

$\frac{F^2 R}{2Z^2}$ = અનુનાદના મૂલ્યનું $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{F^2}{2R}$

તે પરથી $Z^2 = 2R^2$

પણ $Z^2 = X^2 + R^2 = 2R^2$

તેથી $X^2 = R^2$

અથવા $X = \pm R$

અને આ સ્થિતિમાં p ના બે મૂલ્યો હશે. તેમાનું એક (P_1) એ ω કરતા વધારે હોય છે અને બીજુ (P_2) એ ω કરતા ઓછું હોય છે. સમી.(36) મુજબ X નું મૂલ્ય મૂકતાં,

$\frac{\mu}{p_1} m p_1 = R$

અથવા $m \frac{\mu}{m p_1} m p_1 = R$

અથવા $\frac{\omega^2}{p_1} - p_1 = \frac{R}{m}$ -----------(47)

અને $\frac{\omega^2}{p_2} - p_2 = -\frac{R}{m}$ ---------------(48)

હવે સમી.(47) અને (48) પરથી

$\omega^2 \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right) - (p_1 + p_2) = 0$

અથવા $\frac{\omega^2}{p_1 p_2} = 1$ ---------(49)

સમી.(31)માંના ω^2 નું મૂલ્ય સમી.(49) દ્વારા મેળવતા,

$$\left(\frac{p_1 p_2}{p_1} - p_1\right) = p_2 - p_1 = \frac{R}{m}$$

અને આ સંબંધ અર્ધ શક્તિ પટ્ટ (half power bandwidth) તરીકે ઓળખાય છે. આજ પ્રકારનો સંબંધ સમી.(43)માં $\frac{E}{E_{max}} = \frac{1}{2}$ મૂકતાં મેળવી શકાય છે.

(3) સંયુક્ત લોલક અને ગજીયું લોલક (Compound Pendulum and Bar Pendulum)

સંયુક્ત લોલક (Compound Pendulum):

એક સંયુક્ત લોલક એ એક દ્રઢ (અથવા તો ભૌમિતીક આકાર ધરાવતી) રચનાનું બનેલ દ્રઢ લોલક હોય છે. કે જે તેનામાંથી પસાર થતી સમક્ષીતીજ અક્ષને અનુલક્ષીને મુક્ત પણે આંદોલન કરી શકે છે.અને તેના દોલનો પણ સાદી પ્રસંવાદી ગતિના હોય છે અને તેનો આર્વતકાળ નીચે મુજબ દર્શાવાય છે.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg \cdot l}}$$

જ્યાં I એ આધાર અક્ષને અનુલક્ષીને તેની જડત્વની ચાકમાત્રા છે. m એ તેનું દ્રવ્યમાન છે અને l એ તેની લંબાઇ છે. (અથવા તેની આધાર અક્ષ અનેતેના ગુરુત્વ બિંદુ વચ્ચેનું અંતર છે.)

હવે જો S એ આ રચનાનું આધાર બિંદુ હોય કે જેમાંથી આપણી આકૃતિના પૃષ્ટ ને લંબરૂપે એક સમક્ષીતીજ અક્ષ પસાર થતી હોય તો આ અક્ષની આસપાસ તે દોલન કરશે. એને સામાન્ય સ્થિતિમાં આધાર બિંદુ S ની નીચેના ભાગે ગુરુત્વબિંદુ G રહેલું હોય છે. આકૃતિમાં ઘાટી રેખા દર્શાવેલ છે તે લોલકની સામાન્ય સ્થિતિ દર્શાવે છે.

હવે જો આકૃતિમાં ત્રુટક રેખાઓ વડે દર્શાવેલ છે તે મુજબ આ લોલકને θ જેટલા કોણે સ્થાનાંતર આપવામાં આવે તો તેનું ગુરુત્વ કેન્દ્ર G' સ્થાન પર આવશે. અને તેથી તેના દ્રવ્યમાન અને ગુરુત્વ પ્રવેગની સંયુક્ત અસર m g દ્વારા તેના પર પુનઃસ્થાપીત બળ m g l sin θ લાગશે અને તેને કારણે તે ફરી પાછું તેની મૂળ અવસ્થામાં જવા પ્રેરાશે. (અહીં SG' એ લોલકની લંબાઇ l છે.)અને આ બળને કારણે લોલકમાં કોણીય પ્રવેગ $\frac{d\omega}{dt}$ ઉત્પન્ન થશે. અને સંયુકત બળ $I\frac{d\omega}{dt}$ થશે . જ્યાં I એ લોલક્ના જડત્વની ચાકમાત્રા છે.

તેથી $I\frac{d\omega}{dt} = -mg \cdot l\sin\theta = -mg \cdot l\theta$ --------(A)

($\because$ θ નું મૂલ્ય ખૂબજ ઓછું હોય છે તેથી $\sin\theta = \theta$)

અથવા $\frac{d\omega}{dt} - \frac{mg \cdot l}{I} \cdot \theta = -\mu\theta$ (જ્યાં $\frac{mg \cdot l}{I} = \mu$ જે અચળાંક છે.)

તેથી લોલકનો કોણીય પ્રવેગ $\frac{d\omega}{dt}$ એ કોણીય સ્થાનાંતર θ ને સમપ્રમાણ હોય છે. અને તેથી લોલકમાં સા.પ્ર. ગ. ઉત્પન્ન થાય છે અને તે ગતિનો આવર્તકાળ નીચે મુજબ થશે.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\mu}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\frac{mg \cdot l}{I}}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg \cdot l}}$$ ------------(B)

હવે જો લોલક્ના પદાર્થના ગુરુત્વ બિંદુ G માંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા I_0 હોય જે અક્ષ S અને G માંથી પસાર થતી અક્ષને સમાંતર હોય છે. તેથી સમાંતર અક્ષના સિધ્ધાંત મુજબ

$I = I_0 + ml^2$

અને G માથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યા k હોય તો

$I_0 = mk^2$ તેથી $I = mk^2 + ml^2$

I ની આ કિંમત સમી.(B) માં મૂકતાં

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mk^2+ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{k^2+l^2}{gl}} \qquad \text{---------(c)}$$

અથવા $T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{k^2}{l}+l}{g}}$

અને તે દોલનનો આવર્તકાળ દર્શાવે છે અને સંયુક્ત લોલકનો આ આવર્તકાળ એ $\frac{k^2}{l}+l$ અથવા $\frac{k^2+l^2}{l}$ જેટલી લંબાઇના સાદા લોલક્ના આવર્તકાળ જેટલો જ છે. એટલે કે તે સંયુકત લોલક્ની ઘટેલી લંબાઇ **(reduced length)** અથવા તો સંયુકત લોલકની લંબાઇ દર્શાવે છે અને તેને સંજ્ઞા **L** વડે દર્શાવાય છે.

હવે k^2 નું મૂલ્ય હંમેશા શૂન્ય કરતા વધુ હોય છે અને આ સંયુઅક્ત લોલકની લંબાઇ એ હંમેશાં **l** કરતાં વધારે હોય છે.

દોલનનું કેન્દ્ર (Centre of Oscillation) :

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ **G**ની બીજી તરફ **G** થી $\frac{k^2}{l}$ જેટલા અંતરે આવેલ એક બિંદુ **O** છે. જેને દોલનનું કેન્દ્ર કહેવાય છે. અને તેમાંથી પસાર થતી સમક્ષીતીજ અક્ષ કે જે આધારની અક્ષને સમાંતર છે. તેને લોલકના આંદોલનની અક્ષ કહેવાય છે. તેથી, **GO=**$\frac{k^2}{l}$ અને આકૃતિ**(a)** મુજબ તેના બરાબર **l** મૂકતાં,

$$SO = l + l' = l + \frac{k^2}{l}$$

અને $T = 2\pi\sqrt{\frac{l+\frac{k^2}{l}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

તેથી દોલનબિંદુ **O** એ આધાર બિંદુ **S** થી **L** જેટલા અંતરે આવેલ છે એટલે કે આ બે બિંદુ વચ્ચેના અંતરને સમતુલ્ય લોલકની લંબાઇ કહેવાય છે.

આધાર બિંદુ અને દોલન બિંદુ ની પરસ્પર અદલાબદલી(Interchangeability of Centre of Suspension and Oscillation)

જો લોલક ને ઉલટું કરી અને તેની દોલન અક્ષ પર આવેલ બિંદુ **O** દ્વારા લટકાવવામાં આવે (જે આકૃતિ **b** માં દર્શાવેલ છે) તો દોલનો નો આવર્તકાળ નાચે મુજબ થશે.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2+l^2}{l'g}}$$

પરંતુ $\frac{k^2}{l} = l'$ તેથી $k^2 = l \cdot l'$

તેથી આવર્તકાળનું સ્વરૂપ નીચે મુજબ થશે.

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{l\cdot l'+l'^2}{l'g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l+l'}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l+\frac{k^2}{l}}{g}}$$

અને તે લોલકને આધારબિંદુ **S** વડે લટકાવતા મળતા આવર્તકાળ જેવાં જ સ્વરૂપનું છે.

તેથી કહી શકાય કે આધાર બિંદુ અને દોલન બિંદુ નો પરસ્પર ફેરફાર કરી શકાય છે. કારણ કે તે બંને એક બીજાને વ્યસ્ત પ્રમાણમાં ચલે છે. આ પ્રકારના લોલકનો ગુણધર્મ સૌ પ્રથમ હાઇઝ એ શોધેલ.

એટલે કે આપણે લોલકને આધારબિંદુ S અથવા દોલન બિંદુ O વડે લટકાવીએ તો તે બંને કિસ્સામાં કંપવિસ્તાર સમાન મળે છે અને તેની સમતુલ્ય સાદા લોલકની લંબાઇ પણ સમાન મળે છે. એટલે કે ગુરુત્વ કેન્દ્ર G માટે મળતી લંબાઇ l અને દોલન બિંદુ ને અનુરૂપ લંબાઇ $\frac{k^2}{l}$ બંને માટે સમાન આવર્તકાળ મળે છે. અને તેથી પ્રાયોગીક રીતે આ બે બિંદુઓ S અને G મેળવી અને તે પરથી તેની લંબાઇ L અથવા તેની સમતુલ્ય સાદા લોલકની લંબાઇ $l+\frac{k^2}{l}$ શોધી શકાય છે. તદઉપરાંત ગુરુત્વ પ્રવેગનું g મૂલ્ય $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ સૂત્રની મદદથી જેતે સ્થળ ને અનુરૂપ મેળવી શકાય છે.

ગજીયું લોલક (Bar Pendulum):

સંયુક્ત લોલકમાં સૌથી સરળ અને અનુકુળ હોય તેવુ લોલક એ ગજીયું લોલક છે. તે આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ ફક્ત ધાતુની એક પટ્ટી AB રૂપે હોય છે અને તેમાં એક્સરખા અંતરે તેના કેન્દ્રની બંને બાજુએ છીદ્ર કરેલ હોય છે તેનું કેન્દ્ર એ તેનુ ગુરુત્વ કેન્દ્ર C હોય છે અને આમાંના કોઇ પણ છીદ્રમાં ગોઠવી શકાય તેવી એક છરીધાર K ધરાવતી ધરી હોય છે અને તેના દ્વારા આ લોલક તેના સમક્ષીતીજ તલમાં દોલન કરી શકે છે.

તેના ગુરુત્વ કેન્દ્ર C ની બંને બાજુના છીદ્રનું અંતર નોંધી અને તેમાં છરી ધાર K ગોઠવી અને A થી B વચ્ચેના દરેક છિદ્રને અનુરૂપ આ લોલક્ને આંદોલીત કરી અને દરેક છીદ્ર માટેનો આવર્તકાળ નોંધવામાં આવે છે.

અને ત્યારબાદ ગુરુત્વ કેન્દ્ર C થી છીદ્રના અંતરને X-અક્ષ પર અને આવર્તકાળને Y-અક્ષપર લઇ અને નીચેની આકૃતિ-2માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો આલેખ દોરવામાં આવે છે.

તેમાં સૌ પ્રથમ G થી A તરફના છિદ્રો માટે દોલનો કરી અને તે માટે વક્ર ABD મેળવવામાં આવે છે ત્યાર બાદ લોલકને ઉલટુ કરી અને તે માટે વક્ર EFH મેળવવામાં આવે છે. અને આમ, CG રેખાની બંને બાજુએ એક સરખી સીમેટ્રી ધરાવતા વક્રો મળે છે અને આકૃતિમાં જોતા જણાય છે કે તેનો આવર્તકાળ શરૂઆતમાં ગુરુત્વ કેન્દ્રના છીદ્ર માટે આવર્તકાળ અનંત થઇ જાય છે.

હવે જો આ આલેખ પર એક સમક્ષીતીજ રેખા JN દોરવામાં આવે તો તે વક્રને J, K, M, અને N બિંદુ એ છેદશે. અને સ્વાભાવીક છે કે આ બિંદુઓ એક રેખા પર આવેલ હોવાથી તેનો આવર્તકાળ સમાન હોય છે.અને JM = KN= L કે જે તેના સમતુલ્ય સાદા લોલકની લંબાઇ થશે. આમ, થવાનું કારણ એ છે કે બિંદુJ અને બિંદુ N એ ગુરુત્વ કેન્દ્ર ની અલગ અલગ બાજુએ રહેલ છે. અને ગુરુત્વ કેન્દ્રથી સરખા અંતરે આવેલ છે તેથી તેને L લંબાઇના સમતુલ્ય સાદા લોલક સાથે સરખાવતા તેમાંના એક બિંદુને આધાર બિંદુ S અને બીજા બિંદુને દોલન બિંદુ O સાથે સરખાવી શકાય. અને આમ, JM જેટલી જ લંબાઇ KN ની થશે. તેથી તે બંને લંબાઇ મેળવી અને તેનું સરેરાશ મૂલ્ય મેળવવામાં આવે છે. અને તે પરથી સંયુકત લંબાઇ L મેળવાય છે. અને તેનો આવર્તકાળ

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ તે પર થી

$g = \frac{4\pi^2}{T^2}$

આમ, લંબાઇ L અને આવર્તકાળ T મેળવી તે પરથી પ્રાયોગીક સ્થળ માટે ગુરુત્વ પ્રવેગ g નું મૂલ્ય મેળવી શકાય છે.

K નું મૂલ્ય મેળવવું (Determination of K)

હવે જે આપણે વક્રોના સૌથી નીચે આવેલ ભાગને સ્પર્શક બની એક એક રેખા **SQ** દોરીએ તો તે બંને વક્રોને અનુક્રમે **B** અને **F** બિંદુએ સ્પર્શ કરશે જે ઉપરની આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે અને આ બંને બિંદુઓ માટેનો લોલકનો આવર્તકાળ ન્યુનતમ હોય છે અને એ વખતે આધાર બિંદુ અને દોલન બિંદુ એક બીજા પર સંપાત થયેલ હોય છે.

તેથી $\boldsymbol{l = \frac{K^2}{l}}$ અથવા $\boldsymbol{K^2 = l^2}$ જેથી $\boldsymbol{K = l}$

તેથી **BP** અને **FP** એ બંને અંતરો સમાન થશે અને તે અંતર એ ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા **K** જેટલું હોય છે.

તેથી **BF =2K** અથવા $K = \frac{BF}{2}$

તેથી જો બંને બિંદુ **B** અને **F** માટે આપણે ન્યુનતમ આવર્તકાળ **Tm** નોંધી એ (કે જે આલેખમાં અંતર **CP** વડે મળે છે.)

તો, $T_m = 2\pi\sqrt{\frac{2K}{g}}$

તે પર થી ફરી પાછું ગુરુત્વ પ્રવેગ **g** નું મૂલ્ય $g = \frac{8\pi^2 R}{T_m^2}$ દ્વારા મેળવી શકાય

પરંતુ બિંદુઓ **B** અને **F** ને આલેખના ચોક્કસ સ્થાન પર મેળવવા મુશ્કેલ છે. કારણ કે આલેખનો સ્પર્શક તેજ બિંદુમાંથી પસાર થવાની શક્યતા ઓછી હોય છે. તેથી આપણે **K** નું મૂલ્ય સમી. $\frac{K^2}{l} = l'$ અથવા $K^2 = \sqrt{ll'}$ પરથી મેળવી શકીએ. કારણ કે અહીં આલેખમાં **JR** અને **NR**નું મૂલ્ય જેટલું હોય છે. અને **KR** અને **RM** નું મૂલ્ય l' જેટલું તેથી

$$K = \sqrt{l\,l'} = \sqrt{JR \cdot KR} = \sqrt{NR \cdot MR}$$

અને આ રીતે ગજીયા લોલકની ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા **K** સરળતાથી શોધી શકાય છે.

1928 માં ફરગ્યુસને એવું સૂચન કર્યું કે ઉપર મુજબના વક્ર ને બદલે એક આલેખ એ રીતે દોરવામા6 આવે કે જેમાં lT^2 ને **X-** અક્ષ પર લેવામાં આવે અને l^2 ને **Y-** અક્ષ પર લેવામાં આવે તો સમી. $l^2 + K^2 = \frac{lT^2}{4\pi^2}$ મુજબ આલેખ એક સુરેખા રૂપે મળશે. જે નીચેની આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે. અને આ સુરેખાનો ઢાળ $\frac{g}{4\pi^2}$ થશે. અને તેનો **Y-** અક્ષ પરનો અંતઃખંડ **-K2** બરાબર થશે. અને તે પરથી **g** અને **K** નું વધુ ચોક્કસ મૂલ્ય મેળવી શકાય છે.

આ રીતમાં પણ ગુરુત્વ કેન્દ્ર શોધવું જરૂરી છે. કારણ કે તે પરથી **l** નું જુદુ જુદુ મૂલ્ય મળે છે. પરંતુ તે માટે લોલક્નું બેલેન્સ કરી અને કેન્દ્રબિંદુ મેળવી શકાય અને તેમ છતાં **l** ના મૂલ્યમાં જે ક્ષતિ હોય છે તે ગ્રાફ પર સુરેખા દોરવાથી દૂર થઇ જાય છે.