Chapter-1

સદિશ બીજગણિત (Vector Analysis)

ભૌતિકશાસ્ત્ર ના જુદાજુદા નિયમો તથા ભૌતિક રાશિઓ વચ્ચેના સંબંધો સમીકરણની મદદથી દર્શાવવામાં આવે છે. ભૌતિક રાશિઓને સામાન્ય રીતે બે ભાગમાં વહેંચી શકાય છે. (૧) અદિશ રાશિ (૨) સદિશ રાશિ

(૧) **અદિશ રાશિ**: જે ભૌતિક રાશિ ને દર્શાવવા માટે ફક્ત મૂલ્યની જરૂરપડે છે. તેવી ભૌતિક રાશિને અદિશ રાશિ કહે છે. દા.ત. દળ , ધનતા , તાપમાન વગેરે.

(૨) **સદિશ રાશિ**: જે ભૌતિક રાશિ ને દર્શાવવા માટે મૂલ્ય ઉપરાંત દિશાની જરૂરપડે છે. તેવી ભૌતિક રાશિને સદિશ રાશિ કહે છે. દા.ત. વેગ, પ્રવેગ, ટોર્ક , બળ , વેગમાન વગેરે.

બે સદિશોનો ગુણાકાર (Product of Two Vectors)

(૧) બે સદિશોનો અદિશ અથવા ડોટ ગુણાકાર :

સદિશ $\vec{A}$ અને સદિશ $\vec{B}$ ના અદિશ ગુણાકારને $\vec{A} \cdot \vec{B}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\,cos\theta$$

કાટેઝીયન યામ પધ્ધતિમાં $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

એકમ સદિશ $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ અને $\hat{k}$ માટે

$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = \hat{\imath} \cdot \hat{k} = 0$ અને $\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$

(૨) બે સદિશોનો સદિશ અથવા ક્રોસ ગુણાકાર :

સદિશ $\vec{A}$ અને સદિશ $\vec{B}$ ના સદિશ ગુણાકારને $\vec{A} \times \vec{B}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. જો પરિણામી સદિશ $\vec{R}$ હોય તો $\vec{R} = \vec{A} \times \vec{B} = ABsin\theta$

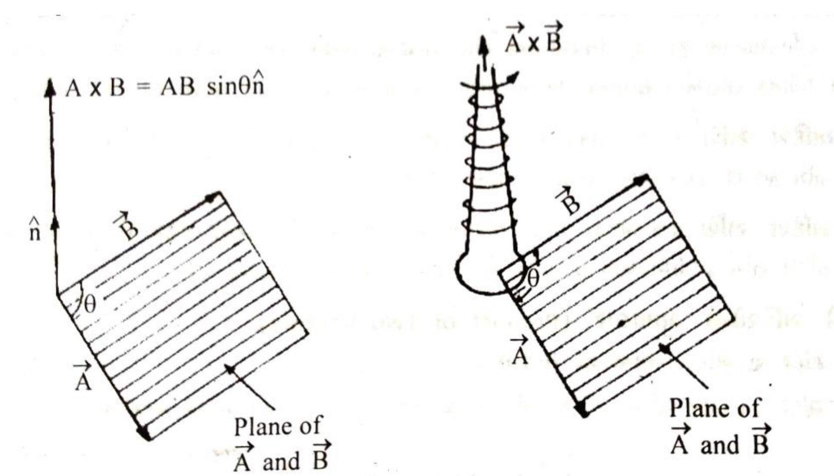
$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{i}\left[A_y B_z - A_z B_y\right] + \hat{j}\left[A_z B_x - A_x B_z\right] + \hat{k}\left[A_x B_y - A_y B_x\right]$$

એકમ સદિશ $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ અને $\hat{k}$ હોય તો

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 \quad \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \quad \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k} \quad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i} \quad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$$

પરિણામી સદિશ $\vec{R}$ ની દિશા જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમથી નક્કી કરવામાં આવે છે. જે નીચેની આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે.



ત્રણ સદિશોનો ગુણાકાર (**Product of Three Vectors**) :

ત્રણ સદિશોનો શક્ય હોય તો ગુણાકાર થી જ ગણતરી કરવામાં આવે છે. જેમાં (૧) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C})$ અને (૨) $\vec{A} \times (\vec{B} \cdot \vec{C})$ જે શક્ય નથી. કારણ કે કૌસમાં રહેલા બે સદિશોનો ગુણાકાર અદિશ મૂલ્ય આપે છે. અદિશોનો સદિશ ડોટ કે ક્રોસ ગુણાકાર શક્ય નથી. (૩) ત્રણ સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ અને (૪) ત્રણ સદિશોનો સદિશ ગુણાકાર $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$

ત્રણ સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર (Scalar Product of Three Vectors):

ધારો કે $\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$ ગુણાકાર મેળવવો છે. તો $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$

$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$

$$\vec{C} = C_x\hat{\imath} + C_y\hat{\jmath} + C_z\hat{k}$$

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$= \hat{\imath}\left[B_yC_z - B_zC_y\right] - \hat{\jmath}\,[B_xC_Z - B_zC_x] + \hat{k}[B_xC_y - B_yC_x]$

$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = [\,A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}] \cdot \{\,\hat{\imath}\left[B_yC_z - B_zC_y\right] - \hat{\jmath}\,[B_xC_Z - B_zC_x] + \hat{k}[B_xC_y - B_yC_x]\}$

$=A_x\left[B_yC_z - B_zC_y\right] - A_y[B_xC_z - B_zC_x] + A_z[B_xC_y - B_yC_x]$

$$\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = [\vec{A}\ \vec{B}\ \vec{C}\ ]$$

ત્રણ સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર નો ચક્રિય ગુણધર્મ (**Cyclic Property**)

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ B_x & B_y & B_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$$

$$= \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$$

$$\therefore\ \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$$

ઉપરના સ્મીકરણને ત્રણ સદિશોના અદિશ ગુણાકારનો ચક્રિય ગુણધર્મ કહે છે. $\vec{A}$,$\vec{B}$ અને $\vec{C}$ ના સ્થાન ચક્રિય રીતે બદલવાથી પરિણામી મૂલ્યમાં કોઇ જ ફેર પડતો નથી.

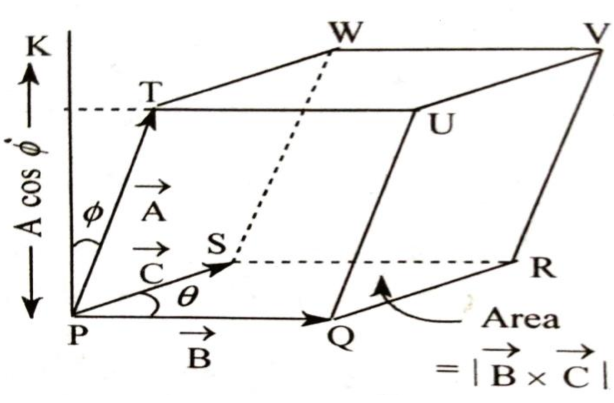
$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \vec{B}\times\vec{C}\cdot\vec{A}$$

પરંતુ ચક્રિય ગુણધર્મ પ્રમાણે $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A}$

ઉપરના બે સમીકરણ પર થી $\vec{B}\times\vec{C}\cdot\vec{A} = \vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A}$

આનો અર્થ એમ થાય કે ત્રણ સદિશોના અદિશ ગુણાકારમાં ડોટ અને ક્રોસના સ્થાન અદ્લા-બદલી કરતાં પરિણામમાં કોઇ જ ફેર પડતો નથી.

ભૌમિતિક અર્થઘટન (Physical Interpretation) :



આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે $\vec{A}, \vec{B}$ **અને** $\vec{C}$ જેની પાસપાસેની બાજુઓ હોય તેવી એક સમલંબ ઘન બનાવો.

હવે $|\vec{B} \times \vec{C}| = |\vec{B}| \ |\vec{C}| \sin\theta$

= $|\vec{B}|$ **અને** $|\vec{C}|$ બાજુવાળા અને તેમની વચ્ચે θ કોણવાળા ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ

= PQRS નું ક્ષેત્રફળ

સમલંબઘનની ઊંચાઇ = $|\vec{A}| \cos\emptyset = \text{PK}$

સમલંબઘનનું કદ = PQRS નું ક્ષેત્રફળ × PK

$= |\vec{B}| \ |\vec{C}| \ \sin\theta \ |\vec{A}| \ \cos\emptyset$

$= |\vec{B} \times \vec{C}| \ |\vec{A}| \ cos\emptyset$

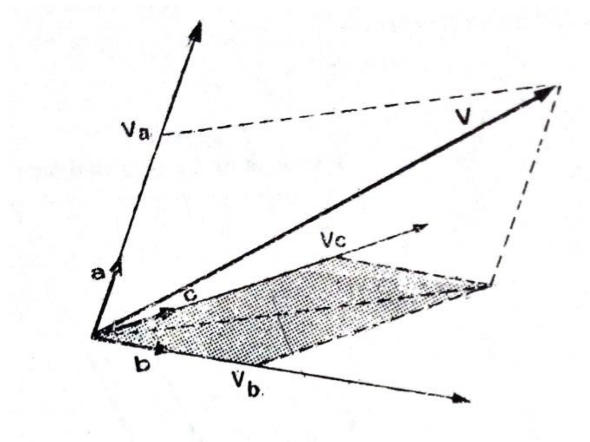
$= \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$

$\vec{A}, \vec{B}$ **અને** $\vec{C}$ જેની પાસપાસેની બાજુઓ અને હોય તેવા સમલંબઘનનું કદ = $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$

જો $\vec{A}, \vec{B}$ **અને** $\vec{C}$ સમતલસ્થ હોય તો તેમના વડે રચાતા સમલંબઘનનું કદ શૂન્ય થશે. તેથી ત્રણ સમતલસ્થ સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર શૂન્ય હોય છે.

પારસ્પરિક સદિશો (Reciprocal Vectors) :

પારસ્પરિક સદિશોનો ખ્યાલ ઘણી વાર ઘન અવસ્થા ભૌતિકશાસ્ત્રમાં કરવામાં આવે છે.આને સમજવા માટે કોઇ સદિશ V લેવામાં આવે કે જે આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે ત્રાંસી અક્ષ પર a, b, c ઘટકો તેના અક્ષ પર છે. અહીં a, b, c એકમ સદિશો હોવા જરૂરી નથી.



સદિશ ને નીચે પ્રમાણે લખતાં

$V = V_a a + V_b\, b + V_c\, c$ --------(1)

જ્યાં V_a , V_b , V_c એ સદિશ V ના ભાગ છે કે જેમની દિશાઓ અને આધાર a ,b ,c છે.

$$V^2 \neq V_a^2 + V_b^2 + V_c^2$$

હવે જો પારસ્પરિક સદિશને A, B, C દર્શાવવા હોય તો

$A = \frac{b\times c}{(abc)}$, $B = \frac{c\times a}{(abc)}$ $and\ C = \frac{a\times b}{(abc)}$ ---------(2)

ઉપરોક્ત સમી. દર્શાવે છે કે A એ b અને c સમતલ ને લંબ છે. તેથી A ની તીવ્રતા 1/a ને સમપ્રમાણ થાય.આમ ઉપરથી a . A = b . B = c . C = 1 ----------(3)

અને A . b = A . c = B .a = B .c =C . a = C . b = 0 -----------(4)

હવે ધારોકે P એ પારસ્પરિક સદિશ હોય તો

$P = P_A\, A + P_B\, B + P_C\, C$ -----------------(5)

જ્યાં P_A, P_B , P_C એ જુદી જુદી દિશાના A,B,C ના ભાગ છે.

જો V અને P નુ ડોટ ગુણાકાર લઇએ તો

$$V \cdot P = (V_a a + V_b\, b + V_c\, c) \cdot (P_A A + P_B B + P_C C)$$

અથવા $V \cdot P = V_a P_A + V_b P_B + V_c P_C$ -----------(6)

જો $V \equiv P , V \cdot P = V^2$ હોય તો સમી. (6) પરથી

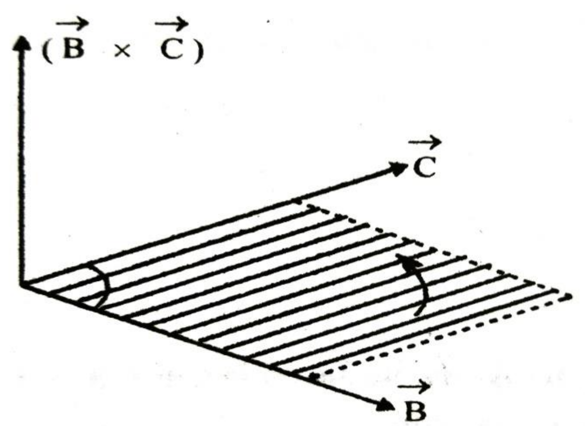
$V^2 = V_aV_A + V_bV_B + V_cV_C$ ------------(7)

જે ડોટ ગુણાકાર ના મળતા પરિણામ જેવુ જે મળે છે. જો V અને P સદિશોના અલગ અલગ યામો લઇએ તો કાટેઝિયન યામ પધ્ધતિ પણ બદલાય.

પારસ્પરિક સદિશની વ્યાખ્યાઓ પરથી સ્પષ્ટ થીય છે કે એકમ સદિશનો ઓર્થોગોનલ સમૂહ તેનો પોતાનો પારસ્પરિક સમૂહ છે.

ત્રણ સદિશોનો સદિશ ગુણાકાર (Triple Vector Product) :

આ ગુણાકાર $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ વડે દર્શાવાય છે. $\vec{B} \times \vec{C}$ $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ વડે રચાતા સમતલને લંબ છે. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ એ $\vec{A}$ અને $(\vec{B} \times \vec{C})$ ના સમતલને લંબ છે. એટલે કે $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ એ $(\vec{B} \times \vec{C})$ ને લંબ છે.



આકૃતિ પરથી જોઇ શકાય કે $(\vec{B} \times \vec{C})$ ને લંબ એવો કોઇ પણ સદિશ $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ વડે રચાતા સમતલમાં હશે. આમ. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ વડે મળતો સદિશ $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ ના સમતલમાં જ હોય છે. આનો અર્થ એવો થાય છે કે $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ ના સદિશને $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ ના રેખીય સંયોજન વડે દર્શાવી શકાય.

$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = b\vec{B} + c\vec{C}$ -----------(1)

સમી.(1) માં $\vec{A}$, $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ ને તેમના ઘટકોના સ્વરૂપમાં લઇ $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ ના ઘટકો ના સ્વરૂપમાં ગણતરી કરી સમી. ની ડાબી અને જમણી બાજુ સરખાવવાથી a અને b નાં મૂલ્યો શોધી શકાય.

આપેલા સદિશ $\vec{A}$, $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ માટે X , Y, Z યામાક્ષો એવીરીતે ગોઠવો કે જેથી X- અક્ષ પર $\vec{B}$ સંપાત થાય અને (x,y) સમતલ $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ વડે રચાતા સમતલમાં હોય આ સ્થિતિમાં,

$$\vec{B} = B_x\,\hat{\imath}$$

$$\vec{C} = C_x\,\hat{\imath} + C_y\,\hat{\jmath}$$

$\vec{A} = A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath} + A_z\,\hat{k}$ -----------(2)

$$\therefore\ \vec{B} \times \vec{C} = B_x\,\hat{\imath} \times (C_x\hat{\imath} + C_y\hat{\jmath})$$

$$= B_xC_y(\hat{\imath} \times \hat{\jmath})$$

$$= B_xC_y\hat{k}$$

$$\therefore\ \vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right) \times (B_xC_y\hat{k})$$

$$= -A_xB_xC_y\hat{\jmath} + A_yB_xC_y\hat{\imath} + A_zB_xC_y(\hat{k} \times \hat{k})$$

$\therefore\ \vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = A_yB_xC_y\hat{\imath} - A_xB_xC_y\hat{\jmath}$ ------------(3)

સમી.(3) ની જમણી બાજુ $A_xB_xC_x\hat{\imath}$ ઉમેરો અને બાદ કરો.

$$\therefore\ \vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = A_yB_xC_y\hat{\imath} + A_xB_xC_x\hat{\imath} - A_xB_xC_x\hat{\imath} - A_xB_xC_y\hat{\jmath}$$

$$\therefore\ \vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = -A_xB_x\left(C_x\hat{\imath} + C_y\hat{\jmath}\right) + B_x\hat{\imath}\left(A_yC_y + A_xC_x\right) ------------ (4)$$

પણ સમી. (1) માં આપેલા સદિશો માટે,

$$A_xB_x = \vec{A} \cdot \vec{B}$$

$$A_yC_y + A_xC_x = \vec{A} \cdot \vec{C}$$

$\vec{C} = C_x\,\hat{\imath} + C_y\,\hat{\jmath}$ અને $\vec{B} = B_x\,\hat{\imath}$ --------------(5)

સમી. (4) માં સમી. (5) નો ઉપયોગ કરતાં

$\therefore\ \vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ --------(6)

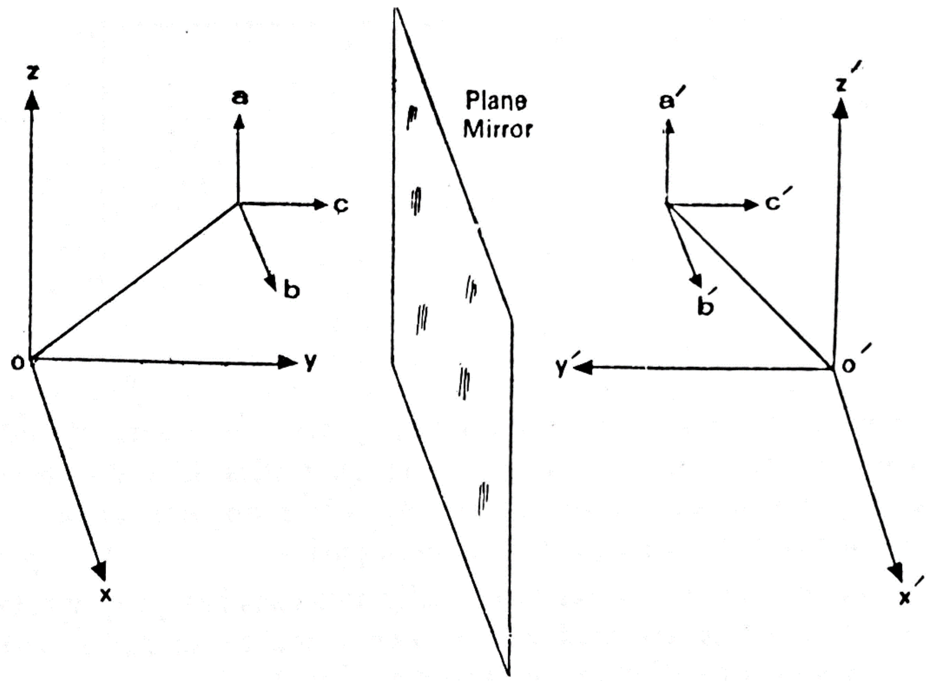
જે ત્રણ સદિશોનો સદિશ ગુણાકાર નુ સૂત્ર છે. આ સૂત્ર " back – cab (BAC – CAB) " યાદ અપાવે છે.

આભાસી સદિશો અને આભાસી અદિશો (Pseudo Vectors and Pseudo Scalars):

આપણે ભૌતિકશાસ્ત્રમાં બે પ્રકારાના જથ્થાની શોધ કરી છે. વેગ, પ્રવેગ વગેરે જે જથ્થામાં છે. જેમાં કણ અથવા સિસ્ટમની ગતિની દિશા સ્પષ્ટ પણે દર્શાવવામાં આવે છે. અન્ય પ્રકારના જથ્થા જેવા કે કોણીય વેગ , કોણીય ગતિ વગેરે પરિભ્રમણનો જથ્થો છે. તેમની દિશા શરીરના પરિભ્રમણની દિશા સૂચવતી નથી. પરિભ્રમણ કરતું શરીર પરિભ્રમણની સુવ્યાખ્યાયિત ધરી ધરાવે છે. પરિભ્રમણની કેન્દ્રિય કે દિશા કેવી રીતે એટલે કે ઘડિયાળની દષ્ટિએ અથવા ઘડિયાળની દૃષ્ટિએ નિરીક્ષક પરિભ્રમણ તરફ જુએ છે તેના પર આધાર રાખે છે. બે સદિશના ક્રોસ પ્રોડ્ક્ટની વ્યાખ્યામાં અથવા પરિભ્રમણ અથવા વિસ્તારને સદિશ તરીકે રજૂ કરવામાં , આપણે મનસ્વી રીતે જમણા હાથના સ્ક્રૂ નિયમની પસંદગી કરી છે. આવી પરિસ્થિતિના ભૌતિકશાસ્ત્રને અસર કર્યા વિના આ માત્રાને રજૂ કરવા માટે ડાબા હાથનો સ્ક્રૂ નિયમ પસંદ કરી શક્યા હોત. જમણા હાથ ના સ્ક્રૂનો નિયમનો ઉપયોગ આપણને જમણા હાથની સંકલન પ્રણાલી તરફ દોરી જાય છે. જ્યારે ડાબા હાથ ના સ્ક્રૂનો નિયમનો ઉપયોગ આપણને ડાબા હાથની સંકલન પ્રણાલી તરફ દોરી જાય છે.

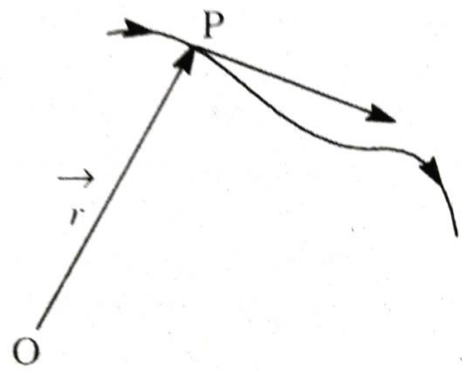
આપણે જોયું કે જુદાજુદા શારિરિક જથ્થાની વર્તણૂક ઉલટું અને અલગ હોય છે. વિસ્થાપન(સ્થાનાંતર) ,બળ, વગેરે જેવા જથ્થાને ધ્રુવીય સદિશો કહે છે. સદિશોનો જથ્થો જેમ કે કોણીય વેગ , ટોર્ક વગેરે જેવા અપરિવર્તન હેઠળ રહે છે. આવા સદિશના જથ્થાને અક્ષીય સદિશો અથવા આભાસી સદિશો કહે છે.

જમણા હાથના કો-ઓર્ડિનંસ સિસ્ટમની એક ધરીનું પ્રતિબિંબ ગણવા માટે કોઇ xz- સમતલ, y-અક્ષ લો. પછી આપણને ડાબા હાથની સિસ્ટમ મળે છે. આ અયોગ્ય પરિભ્રમણને અરીસાના પ્રતિબિંબ કહેવામાં આવે છે. આવા કિસ્સામાં y- અક્ષ સાથે સમાંતર સદિશ ચિન્હને બદલી નાખે છે. જ્યારે x-અક્ષ અને z-અક્ષની સમાંતર સદિશ તેમના ચિન્હ બદલતા નથી.



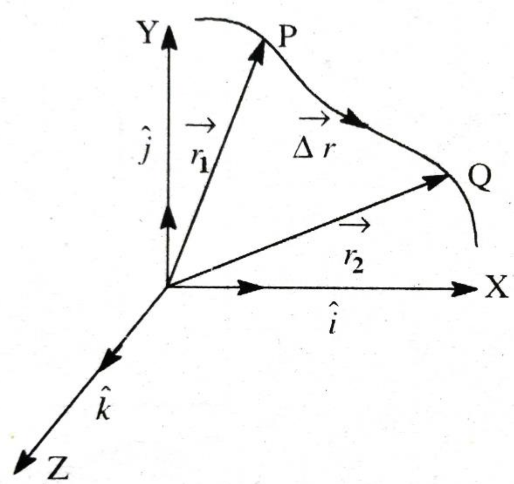
આપણે અરીસામાં a અને b ની ક્રોસ પ્રોડ્ક્ટ તપાસીએ. જમણા હાથના સ્ક્રૂ નિયમનો ઉપયોગ કરીને c = a x b અક્ષની ભાવના પ્રાપ્ત થાય છે. અને નું પ્રતિબિંબ બદલાયું નથી સ્વાભાવિક છે કે a અને b ની ક્રોસ પ્રોડક્ટમાંa′ અને b′ પણ c′ કોઇ ફેરફાર કરવામાં આવશે નહીં. એટલા માટે કોણીય વેગ L= r x p કે ટોર્ક N = r x F અરીસાના પ્રતિબિંબ હેઠળ તેમની નિશાની બદલે છે. આમ, બે ધ્રુવીય સદિશોની ક્રોસ પ્રોડક્ટ આભાસી સદિશ આપે છે. ધ્રુવીય સદિશની પ્રકૃતિ આભાસી સદિશથી તદન અલગ હોવાથી આપણને એવા સમીકરણો જોવા મળ્યા નથી જેમાં ધ્રુવીય સદિશને આભાસી સદિશ સાથે સરખાવવામાં આવે છે. સદિશ A અને B નું ડોટ પ્રોડક્ટ અદિશ જથ્થો છે. એમ એસ. કહે છે. કે આવા અદિશ જથ્થો સાચો અદિશ છે. પરંતુ કદ જેવા જથ્થાને અગાઉ જણાવ્યા મુજબ આભાસી અદિશ છે. વધુમાં જો A અને B માંથી બહાર હોય તો એક ધ્રુવીય સદિશ છે. અને બીજું આભાસી સદિશ છે. તો તેમના ડોટ પ્રોડક્ટ એક અરીસાન પ્રતિબિંબ હેઠળ ચિન્હ બદલી નાખશે. આવા અદિશ જથ્થાને આભાસી અદિશ કહેવામાં આવે છે. એ સ્પષ્ટ છે કે અદિશને આભાસી અદિશ સાથે સરખાવતા ફેરફાર ન હોઇ શકે.

વેગ અને પ્રવેગની સમયની સાપેક્ષે વિકલન ની ગણતરી(Differentiation of a vector with respect to time computation of velocity and acceleration):-



આકૃતિ(1)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારોકે કોઇ એક કણ સમતલ વક્ર માર્ગ પર ગતિ કરે છે. કોઇ ઉદગમબિંદુ θ ને અનુલક્ષીને કણનો સ્થાન સદિશ $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ છે. કણ ગતિ કરતો હોવાથી સમયની સાથે $\vec{r}$ બદલાશે. જે આકૃતિ(2)માં દર્શાવેલ છે. t સમયે કણનો સ્થાન સદિશ $\vec{r}(x, y, z)$ હોય તો,

$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ ------(1)



આકૃતિ(2) કણ t સમયે P પર છે. અને $t + \Delta t$ સમયે કણ Q પર છે. જેના સ્થાન સદિશ $\overrightarrow{r_1}$ અને $\overrightarrow{r_2}$ છે.

$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}$

$\overrightarrow{r_1} = x_1\hat{\imath} + y_1\hat{\jmath} + z_1\hat{k}$

$\overrightarrow{r_2} = x_2\hat{\imath} + y_2\hat{\jmath} + z_2\hat{k}$

કાર્તેઝીય યામ પધ્ધતિમાં એકમ સદિશો $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ બદલાતા નથી. પરંતુ સ્થાન સદિશના ઘટકો સમય સાથે બદલાય છે. સમી.(1) નું પ્રથમ અને દ્વિતીય વિકલન સમયની સાપેક્ષે કરતાં અનુક્રમે કણનો વેગ અને પ્રવેગ મળે છે.

$$\vec{v} = \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$= v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k} \quad \text{--------(2)}$$

તેજ પ્રમાણે

પ્રવેગ $\vec{a} = \dot{v} = \ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2}$

$$\therefore \vec{a} = \dot{v_x}\hat{\imath} + \dot{v_y}\hat{\jmath} + \dot{v_z}\hat{k}$$

$$= a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$

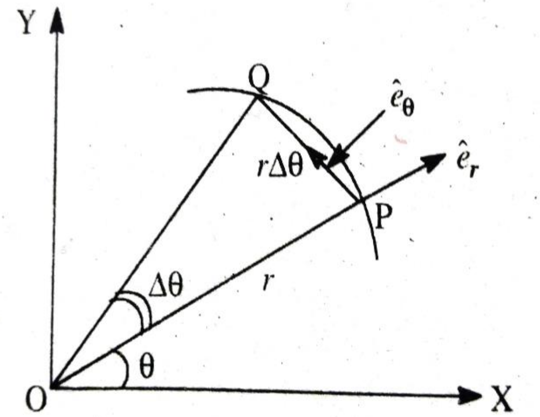
$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k} \text{ --------(3)}$$

જ્યાં $\dot{v_x} = \frac{dv_x}{dt} = a_x$ પ્રવેગનો ઘટક વગેરે.

કેન્દ્રિય બળ ક્ષેત્રમાં (central force field) ગતિ કરતા પદાર્થની ગતિ દર્શાવવા માટે સમતલીય ધ્રુવીય યામો(r, θ) નો ઉપયોગ કરવો પડે છે.યામ પધ્ધતિ કે જેમાં સમતલમાં બિંદુંઓના સ્થાન r અને θ વડે આપવામાં આવે છે. તેને સમતલ ધ્રુવીય યામ પધ્ધતિ કહે છે. કેન્દ્રિય બળ ક્ષેત્રમાં કણ પર લાગતું બળ નિયત બિદું તરફ ત્રિજ્યા સદિશની દિશામાં લાગે છે. સમતલીય ધ્રુવીય યામ પધ્ધતિમાં કણાનું સ્થાન ત્રિજ્યા સદિશ $\vec{r}$ અને નિયત દિશા સાથે બનાવેલા ખૂણા વડે θ દર્શાવાય છે. આકૃતિ (3) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધ્રુવીય યામો r, θ ને કાર્તેઝીય યામ x અને y માં નીચેના સંબંધથી દર્શાવાય છે. X =r cos θ y = r sin θ ---------(4)

ધ્રુવીય યામ પધ્ધતિમાં એકમ સદિશ $\widehat{e_r}$ અને $\widehat{e_\theta}$ લેવામાં આવે છે.

$\widehat{e_r}$ ની દિશા θ અચળ રાખીને વધતા $\vec{r}$ ની દિશામાં અને $\widehat{e_\theta}$ ની દિશા $\vec{r}$ અચળ રાખીને $\vec{r}$ ને લંબ દિશામાં વધતી θ ની દિશામાં લેવામાં આવે છે. આકૃતિ (3)માં $\widehat{e_r}$ અને $\widehat{e_\theta}$ દર્શાવેલ છે.



આમ $\widehat{e_r}$ અને $\widehat{e_\theta}$ એકમ સદિશઓને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.

$$\widehat{e_r} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta r} = \frac{\overrightarrow{\partial r}}{\partial r} \quad (\theta\ constant) \text{ ---------(5a)}$$

$$\widehat{e_\theta} = \lim_{\Delta \theta \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{r\Delta \theta} = \frac{1}{r}\ \frac{\overrightarrow{\partial r}}{\partial r} \quad (r\ constant) \text{ ----------(5b)}$$

કણની ગતિની દિશા સતત બદલાતી હોવાથી એકમ સદિશો $\widehat{e_r}$ અને $\widehat{e_\theta}$ ના મૂલ્યો અચળ રહેતા નથી. આમ સમય સાથે હવે યામો અને એકમ સદિશો બંને બદલાય છે. આથી સમતલીય ધ્રુવીય યામ પધ્ધતિમા દર્શાવેલા સદિશ ($\vec{A}$)નું સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતી વખતે સદિશના ઘટકો અને એકમ સદિશો એમ બધાનું વિકલન કરવું પડશે.

સમતલીય ધ્રુવીય યામ પધ્ધતિમાં સદિશ

$$\vec{A} = A_r\, \widehat{e_r} + A_\theta\, \widehat{e_\theta} \text{ --------(6)}$$

જ્યાં A_r અને A_θ અનુક્રમે $\vec{A}$ વધતા r અને વધતા θ ની દિશામાં ઘટકો છે.

સમી. (6)નું t ના સાપેક્ષે વિકલન કરતાં

$$\frac{\overrightarrow{dA}}{dt} = \frac{dA_r}{dt}\, \widehat{e_r} + A_r \frac{d\widehat{e_r}}{dt} + \frac{dA_\theta}{dt} \widehat{e_\theta} + A_\theta\, \frac{d\widehat{e_\theta}}{dt} \text{ ---------(7)}$$

સ્થાન સદિશ $\vec{r}$ ને સમતલીય યામ પધ્ધતિના એકમ સદિશ વડે $\widehat{e_r}$ નીચે પ્રમાણે દર્શાવાય છે.

$$\vec{r} = r\widehat{e_r} \text{ ------(8)}$$

અને સ્થાન સદિશ $\vec{r}$ ને કાર્તેઝીય યામ પધ્ધતિમાં એકમ સદિશ $\hat{\imath}$ અને $\hat{\jmath}$ વડે નીચે પ્રમાણે દર્શાવાય છે. $\vec{r} = \hat{\imath}\, x + \hat{\jmath}\, y$

x અને y ની કિંમત સમી.(4)માંથી મૂકતાં

$$\vec{r} = \hat{\imath}\, r cos\theta + \hat{\jmath}\, r sin\theta = r\,(\hat{\imath}\, cos\theta + \hat{\jmath}\, sin\theta)$$

આ સમી.નું r અને θ સપેક્ષે વિકલન કરો. અને સમી. (5a) અને (5b) નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \hat{\imath}\, cos\theta + \hat{\jmath}\, sin\theta = \hat{e_r} \quad , \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r\,(-\hat{\imath}\, sin\theta + \hat{\jmath}\, cos\theta) \text{ -------(9)}$$

$$\therefore \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \widehat{e_\theta} = -\hat{\imath} sin\theta + \hat{\jmath}\, cos\theta \text{ --------(10)}$$

સમી.(9) અને (10) પરથી જણાય છે કે $\hat{e_r}$ અને $\widehat{e_\theta}$, θ ના વિધેય છે. $\hat{e_r} \cdot \widehat{e_\theta} = 0$ થાય છે. એટલે $\hat{e_r}$ અને $\widehat{e_\theta}$ એકબીજાને લંબ છે. આમ સમતલ ધ્રુવીય યામો ઓર્થોગોનલ (Orthogonal - લંબ) યામ પધ્ધતિ બનાવે છે.

સમયની સાથે કણનું સ્થાન બદલાતું હોવાથી $\hat{e_r}$ અને $\widehat{e_\theta}$ પણ બદલાય છે. સમી.(9) અને (10)નું θ ની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d\hat{e_r}}{d\theta} = -\hat{\imath} sin\theta + \hat{\jmath}\, cos\theta = \widehat{e_\theta} \text{ ---------(11)}$$

$$\frac{d\widehat{e_\theta}}{d\theta} = -\hat{\imath}\, cos\theta - \hat{\jmath} sin\theta = -\hat{e_r} \text{ ---------(12)}$$

અને $$\frac{d\hat{e_r}}{dt} = \frac{d\hat{e_r}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \widehat{e_\theta}\frac{d\theta}{dt} \qquad \text{----------(13)}$$

$$\frac{d\widehat{e_\theta}}{dt} = \frac{d\widehat{e_\theta}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\hat{e_r}\frac{d\theta}{dt} \text{ ------------(14)}$$

$\frac{d\hat{e_r}}{dt}$ અને $\frac{d\widehat{e_\theta}}{dt}$ ની કિંમત સમી.(7)માં મૂકતાં,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d\hat{e_r}}{dt}\hat{e_r} + A_r \cdot \widehat{e_\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{dA_\theta}{dt}\widehat{e_\theta} - A_\theta \cdot \hat{e_r}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{dA_r}{dt} - A_\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{e_r} + \left(A_r\frac{d\theta}{dt} + \frac{dA_\theta}{dt}\right)\widehat{e_\theta} \text{ ----------(15)}$$

હવે સમી. (8)નું t ના સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$v = \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\,(r\widehat{e_r}) = \frac{dr}{dt}\,\widehat{e_r} + r\,\frac{d\widehat{e_r}}{dt}$$

$$= \frac{dr}{dt}\,\widehat{e_r} + r\,\frac{d\widehat{e_r}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$v = \dot{r}\,\widehat{e_r} + r\,\dot{\theta}\,\widehat{e_\theta} \quad \text{-----------(16)}$$

આ સમી. માં વેગના $\frac{dr}{dt}$ ઘટકને ત્રિજ્યાવર્તી વેગ-ઘટક કહે છે. અને $r\ \frac{d\theta}{dt} = r\,\dot{\theta} = r\,w = v_\theta$ ઘટકને કોણીય ઘટક કહે છે. v_θ ઘટક સ્થાન સદિશ r ની દિશા બદલાવાથી ઉત્પન્ન થાય છે.

જો કણનું દળ m હોયતો રેખીય વેગમાન

$$P = m\vec{v} = m\,\frac{dr}{dt}\,\widehat{e_r} + r\,w\,m\,\widehat{e_\theta}$$

v ની કિંમત સમી.(16) માંથી મૂકતાં

પૃથ્વીનું કોણીય વેગમાન

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$

$$= r \times \left(m\,\frac{dr}{dt}\,\widehat{e_r} + r\,w\,m\,\widehat{e_\theta} \right)$$

$$= m\,\frac{dr}{dt}\,\vec{r} \times \widehat{e_r} + r\,w\,m\,\vec{r} \times \widehat{e_\theta}$$

$$= 0 + m\,w\,r^2\,\widehat{e_r} \times \widehat{e_\theta}$$

$$\vec{L} = m\,w\,r^2\,\hat{k}$$

સદિશોનું સંકલન(Integration of Vectors):

અભિન્ન ગણતરીની સામાન્ય પ્રક્રિયાઓને સીધા સદિશોના સંકલનનો ઉપયોગ કરી શકાય છે.સામાન્યરીતે સદિશ સંકલનને અદિશ સંકલનમાં રૂપાંતર કરી શકાય છે. અને તેના બદલામાં સામાન્ય પધ્ધતિઓ દ્વારા તેનું મૂલ્યાંકન કરી શકાય છે.

(1)રેખા સંકલન(Line Integral):

ભૌતિકશાસ્ત્રમાં ઘણી વાર નીચે પ્રમાણેના સંકલન જોવા મળે છે.

$\int \emptyset \, dr$, $\int V \cdot dr$ and $\int V \times dr$

જ્યાં $\emptyset = \emptyset\,(x,y,z)$ એ અદિશનું વિધેય છે જે અદિશ ક્ષેત્રનું પ્રતિનિધિત્વ કરે છે.

જ્યાં $V = V(x,y,z)$ એ સદિશનું વિધેય છે જે સદિશ ક્ષેત્રનું પ્રતિનિધિત્વ કરે છે. અને c એ કેટલીક રૂપરેખા છે જેની સાથે સંકલન હાથ ધરવાનું છે. જેને નીચે સંકલન લખી શકાય.

$\int \emptyset \, dr = i \int \emptyset\,(x,y,z)dx + j \int \emptyset\,(x,y,z)dy + k \int \emptyset\,(x,y,z)dz$-------(1)

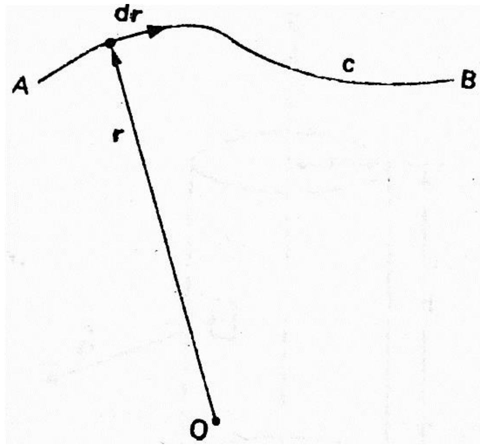
$\int V dr = \int V_x(x,y,z)dx + \int V_y(x,y,z)dy + \int V_z(x,y,z)dz$----------(2)

$$\int V \times dr = i \int \left[V_y(x,y,z)dz - V_z(x,y,z)dy\right]$$
$$+j \int [V_z(x,y,z)dx - V_x(x,y,z)dz]$$
$$+k \int [V_x(x,y,z)dy - V_y(x,y,z)dx]$$ ------(3)

નોધો કે i, j અને k એ સ્થિર એકમ વેક્ટર છે. એટલેકે તેમની તીવ્રતા અને દિશા નિર્દેશન સદિશ r પર આધારિત નથી અને તેથી આ સંકલન ચિન્હ લીધેલો છે. સમી.(1), (2) અને (3)ની જમણી બાજુની સંકલનનું મૂલ્યાંકન સંકલનના સામાન્ય નિયમો દ્વારા કરી શકાય છે. આમ, x ના સંદર્ભમાં અવિભાજ્યનું મૂલ્યાંકન ફક્ત તે જે કરી શકે છે કે તમે y અને z ને જાણો છો. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, બધાનું c ની મદદથી સંકલન કરવાનું છે તે જાણી શકાય.

જો સમી. (1)માં $\emptyset = 1$ હોય તો $\int \emptyset \, dr = \int dr$

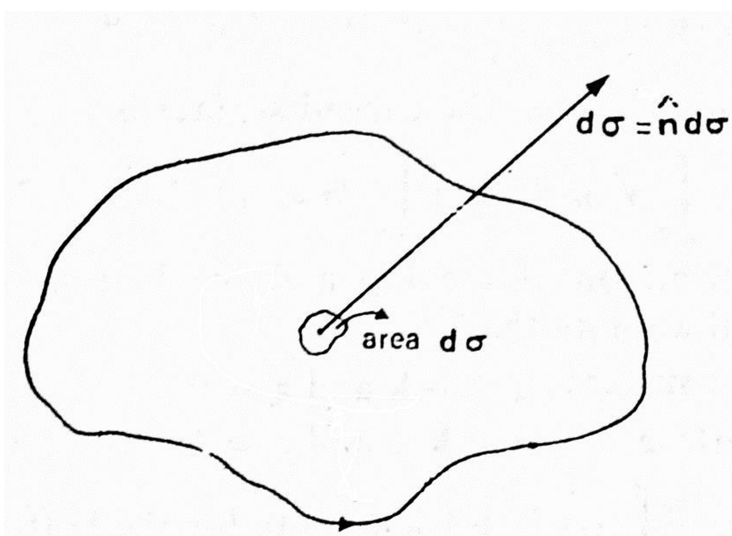
A અને B સ્થાનાંતરના ઘટકો હોય તો જ્યાં A અને B એ વક્ર c ના પ્રારંભિક અને અંતિમ બિંદુઓ છે.



(2)પૃષ્ટ સંકલન (Surface Intrgral) :

અગાઉ જોયું તે મુજબ સમતલ સપાટીનું ક્ષેત્ર એ સદિશનો જથ્થો રજૂ કરે છે. ક્ષેત્રના સદિશને ક્ષેત્રફળના સમતલ પરના જમણા ખૂણા પર દિશા નિર્દેશિત સીધી રેખા દ્વારા રજૂ કરવામાં આવે છે. અને તેની ઉપરના અર્થમાં આધાર રાખે છે. જેમાં બાઉન્ડિંગ વળાંક વર્ણવવામાં આવે છે.ભૌતિકશાસ્ત્રમાં નીચે પ્રમાણેના પૃષ્ટ સંકલન આવેલા છે.

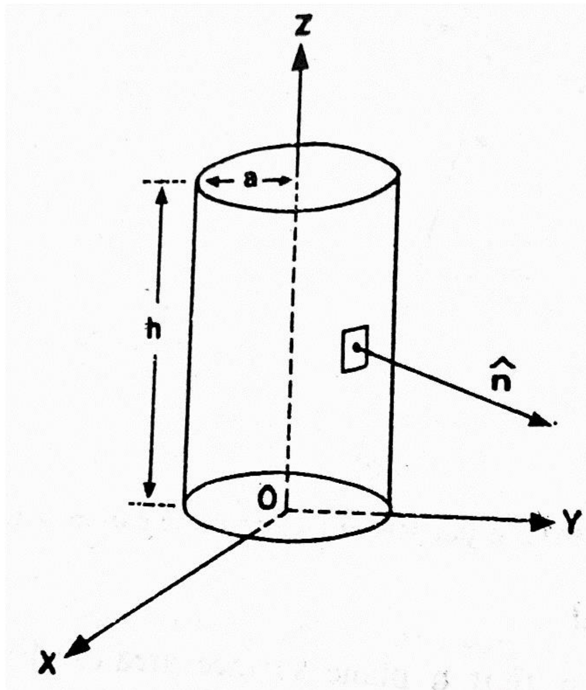
$$\int \emptyset \, d\sigma , \int V \cdot d\sigma \quad and \int V \times d\sigma$$



જ્યાં ϕ અને V અનુક્રમે અદિશ અને સદિશ મૂલ્યોના વિધેયો છે. $d\sigma$ એ આપેલ સપાટીનું એક ભાગ છે. જેના પર σ સંકલનથી મૂલ્યાંકન કરવાનું છે.રેખા સંકલનની જેમ આમાં પણ સંકલનને અદિશ સ્વરૂપે લખવામાં આવે છે. અને પછી સંકલનના સામાન્ય નિયમો લાગુ કરીને યોગ્ય રીતે મૂલ્યંકન

કરવામાં આવે છે. સપાટી સંકલન $\int V \cdot d\sigma$ નું અર્થઘટન સદિશના પ્રવાહ અથવા પ્રવાહ તરીકે થાય છે. આ સપાટીનું મૂલ્યાંકન કરવા માટે સપાટીનો પ્રકાર સ્પષ્ટ કરવાની જરૂર છે.

ઉદાહરણ : નળાકારની સપાટીનું $x^2 + y^2 = a^2$ અને $z = h$ જો $V = ix + jy + kz$ હોય તો $\int V \cdot d\sigma$ મૂલ્યાકન ગણો.



નળાકારની સપાટીનો સામાન્ય એકમ સદિશ નીચે પ્રમાણે છે.

$$\hat{n} = \frac{ix + jy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

તો, $V \cdot \hat{n} = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} = a$

તેથી, વળાંકવાળી સપાટી પરની સપાટી સંકલન છે.

$$\int V \cdot d\sigma = \int V \cdot \hat{n}\, d\sigma = a \int d\sigma = a \times 2\pi a h = 2\pi a^2 h$$

ટોચ અને તળિયાની સપાટીનું યોગદાન શોધવા માટે

નીચેની સપાટી માટે, $\hat{n} = -k \text{ and } z = 0$

ટોચની સપાટી માટે, $\hat{n} = k \text{ and } z = h$

આથી $\int V \cdot d\sigma = -\int (ix + jy) \cdot k d\sigma = 0$ તળિયાની સપાટી માટે

અને $\int V \cdot d\sigma = \int V \cdot k\, d\sigma = h \int d\sigma = h\pi a^2$ ટોચની સપાટી માટે

તો , $\int V \cdot d\sigma = 3\pi a^2 h$ પૂરા નળાકારની સપાટી માટે થાય.

(3) કદ સંકલન (Volume Integral) :

સદિશ બિદું વિધેયનું કદ સંકલન કરવું સરળ છે. ગણતરી કરવા કદના ભાગ તરીકે $d\tau$ (કેટલીક વખતે d^3r or d^3x or dv લખાય) જે પોતે અદિશનો જથ્થો છે.

આમ, સદિશ નું કદ સંકલન ને કદ તરીકે લખતાં,

$$\int V\, d\tau = i \int V_x\, d\tau + j \int V_y\, d\tau + k \int V_z d\tau$$

અંશ:ત વિકલન (Partial Differentiation) :

જો સદિશ V ના કાર્ટેઝિયન વિધેય હોય તો તેના અવકાશના યામો X, Y Z હોય . જો Y અને Z અચળ હોય તો X વધે છે. હવે અંશ:ત વિકલન $\frac{\partial V}{\partial x}$ લઇએ તો Xની સાપેક્ષે V વધે છે Y અને Z અચળ રહે છે. આવી જ રીતે $\frac{\partial V}{\partial y}$ અને $\frac{\partial V}{\partial z}$ વિકલન લઇએ તો સદિશ V, Y અને Z માટે મળે છે. હવે જો X, Y અને Z સતત બદલતા રહીએ તો dx ,dy અને dz ના મૂલ્યો X, Y અને Z યામ પ્રમાણે સતત બદલાતા રહે છે. સદિશV નું કુલ વિકલન અથવા બદવાવ લઇએ તો

dV = $\frac{\partial V}{\partial x}\, dx + \frac{\partial V}{\partial y}\, dy + \frac{\partial V}{\partial z}\, dz$ ----------(1)

જો $r = ix + jy + kz$ સદિશના ઉગમબિદું માંથી પસાર થતી ત્રિજ્યા હોય તો ,તેનુ વિકલન,

$dr = i\, dx + j\, dy + kdz$----------(2)

સમી.(1) લખતાં,

$dV = [\, dx\, \frac{\partial}{\partial x} + dy\, \frac{\partial}{\partial y} + dz\, \frac{\partial}{\partial z}]$ V----------(3)

હવે જો સદિશ વિકલન ઓપરેટરની ફોર્મુલા લઇએ તો,

$\nabla = i\, \frac{\partial}{\partial x}\, j\, \frac{\partial}{\partial y} + k\, \frac{\partial}{\partial z}$-----------(4)

તોસમી.(3) એ ઓપરેટર$\left[dx\, \frac{\partial}{\partial x} + dy\, \frac{\partial}{\partial y} + dz\, \frac{\partial}{\partial z}\right]$ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરતાં dr નું ડૉટ પ્રોડ્ક્ટ અને ∇ (ડેલ એમ વંચાય). તો

$dV = (\, dr \cdot \nabla)V$--------(5)

ઓપરેટર ∇ એ સદિશના વિકલનનો ઓપરેટર છે. જે અદિશ વિધેય અથવા સદિશ વિધેય પર ઓપરેટ કરી શકાય છે.

અદિશ ક્ષેત્રનું ગ્રેડીયન્ટ (Gradient of a Scalar Point Function):

અવકાશના જે વિસ્તારમાં અદિશ રાશિ (ધનતા, દ્રવ્યમાન, તાપમાન, વિધુતભાર) વિતરીત થયેલી હોય તે વિસ્તારને તે રાશિનું અદિશ ક્ષેત્ર કહે છે.

અદિશ ક્ષેત્રમાં અદિશ રાશિનું સમાન મૂલ્ય ધરાવતા બિદુંઓમાંથી પસાર થતા કાલ્પનિક કે વાસ્તવિક પૃષ્ઠને લેવલ પૃષ્ઠ કહે છે.

અદિશ ક્ષેત્રમાં જુદા જુદા બિદુંઓ પાસે જુદી જુદી દિશામાં અદિશ રાશિના મૂલ્યો કેવી રીતે અથવા કેટલા દરથી બદલાય છે. તે જાણવું જરૂરી છે. દા.ત. તાપમાન અદિશ રાશિ છે. કોઇ ગરમ વસ્તુના કોઇ બિદું પાસે જુદીજુદી દિશામાં તાપમાન એકમ અંતર દીઠ કેટલું બદલાય છે. તે જાણવાથી તે દિશામાં તે બિદું પાસેથી કેટલી ઉષ્મા વહેતી હશે તે જાણી શકાય છે. દાત. કોઇ એક વિધેય $f(x)$ માં એક ચલ (variable) X છે. X માં ખૂબ જ નાનો ફેરફાર dX જેટલો કરવામાં આવે તો વિધેય f માં કેટલો ઝડપથી ફેરફાર થાય છે. તે f ના વિકલન df/dx વડે દર્શાવાય છે. એટલે કે બીજા શબ્દોમાં X માં dX જેટલો ફેરફાર કરતાં f માં પણ df જેટલો ફેરફાર થાય છે. df/dx એ સમપ્રમાણતાનો અવયવ(Proportionality factor)છે.

$df = \left(\frac{df}{dx}\right) dx$ (એક પરિમાણમાં)--------(1)

આ જ પ્રમાણે ધારોકે કોઇ એક વિધેય T (ઓરડાનું તાપમાન) ત્રણ ચલોનું બનેલું છે. T(X,Y,Z) ધારોકે ઓરડામાંના કોઇ એક બિદું આગળનું તાપમાન T છે. ઓરડાની જુદીજુદી દિશામાં જુદાજુદા બિદું આગળ તાપમનમાં થતો ઝડપી ફેરફાર દર્શાવવા માટે અનંત જેટલા વિક્લનોની જરૂર પડે.આથી સરળતા માટે આ બિદું આગળ ત્રણ અક્ષો (X,Y,Z) વિચારતાં અને આ દિશામાં તાપમાનમાં થતો ઝડપી ફેરફાર દર્શાવવા માટે વિભાગીય (ખંડશઃ) વિકલન (partial derivatives) ની રીત વપરાય છે.

$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial T}{\partial Z}\right) dz$-------(2)

આમ સમી.(2) પરથી X,Y, અને Z દિશામાં dX, dY અને dZ જેટલો સૂક્ષ્મ ફેરફાર કરવામાં આવે તો તાપમાનમાં થતો ફેરફાર dT મેળવી શકાય છે. અને આથી આપણને અનંત વિકલનોની જરૂર પડશે નહિ.

સમી.(2) ને એકમ સદિશો $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ ના અદિશ ગુણાકારના સ્વરૂપમાં લખતાં,

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\,\hat{\imath} + \frac{\partial T}{\partial y}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial T}{\partial z}\,\hat{k}\right) \cdot (dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k})$$

$$= (\nabla T) \cdot \left(\overrightarrow{dl}\right) \text{----------(3)}$$

જ્યાં $\overrightarrow{dl} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}$ ------(4)

જેને સૂક્ષ્મ સ્થાનાંતર સદિશ (Infinitesimal displacement vector) કહે છે. જ્યારે ∇T ને T નો ગ્રેડીયન્ટ(Gradient) કહે છે.

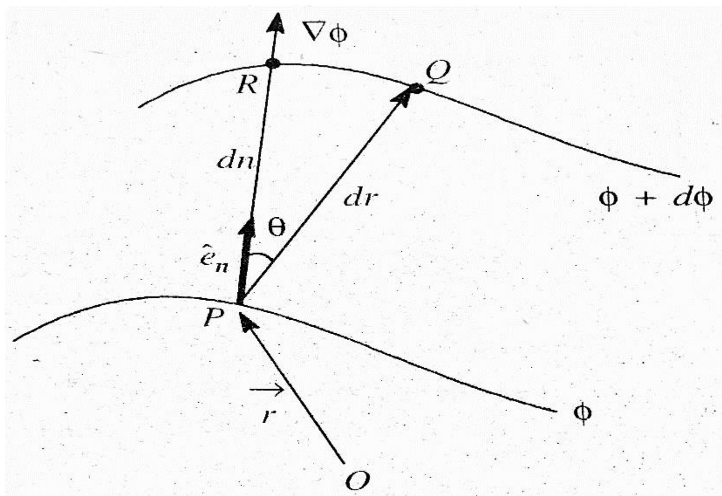
આ સદિશ રાશિ છે. જ્યાં $\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\,\hat{\imath} + \frac{\partial T}{\partial y}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial T}{\partial z}\,\hat{k}$ -------(5)

આમ ગ્રેડીયન્ટને પણ સદિશની માફક માન અને દિશા(Magnitude & direction) બંને હોય છે. અદિશ ગુણાકારને ભૌમિતિક રીતે લખતાં,

$dT = |\nabla T|\,|dl\,|cos\theta$ ----(6)

જ્યાં θ ,∇T અને dl વચ્ચેનો ખૂણો છે. હવે જો $|dl\,|$ નુ મૂલ્ય અચળ રાખવામાં આવે અને જુદીજુદી દિશામાં (θ બદલીને) dT નું મૂલ્ય મેળવવામાં આવે છે. આ દર્શાવે છે કે $\theta = 0$ હોય તો ($cos\theta$ =1) તાપમાનમાં થતો ફેરફાર મહતમ હોય છે. એટલે કે dl નું મૂલ્ય નિયત રાખીને ∇T ની દિશામાં dT માપવામાં આવે તો મહતમ મળે છે.

ઉદાહરણ તરીકે કોઇ એક વિસ્તારમાં કોઇ એક બિદું આગળ અદિશ વિધેય $\emptyset\,(x, y, z)$ વિચારો. આ વિસ્તારમાં બીજા એવા ઘણા પૃષ્ઠો દોરી શકાય કે જેમાં અદિશ વિધેયનું મૂલ્ય અચળ રહે.



આકૃતિમાં બે નજીકના પૃષ્ઠો એવી રીતે દર્શાવ્યા છે કે એક પૃષ્ઠથી બીજા પૃષ્ઠ તરફ જતાં $\emptyset$ નું મૂલ્ય $d\emptyset$ જેટલું બદલાય છે. આકૃતિમાં P બિદુંનો સ્થાન સદિશ $\vec{r}$ છે. અને Q બિદુંનો સ્થાન સદિશ $\vec{r} + \overrightarrow{dr}$ છે. આ બંને પૃષ્ઠો વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર PR છે.

PR = dn = dr $cos\theta$ ----------(7)

જ્યાં θ , $\nabla\,\emptyset$ અને Q વચ્ચેનો ખૂણો છે.

જ્યારે બંને પૃષ્ઠો એકબીજાથી ખૂબ નજીક હોય ત્યારે $\emptyset$ ના મૂલ્યમાં થતો ફેરફારનો દર PR દિશામાં $\frac{\partial\emptyset}{\partial r}$ વડે દર્શાવાય છે. આ દરનું મહતમ મૂલ્ય PR દિશામાં $\frac{\partial\emptyset}{\partial n}$ જેટલું હોય છે. (એકમ લંબ સદિશ $\widehat{e_n}$ ગણું)

$$\frac{\partial\emptyset}{\partial r} = \frac{\partial\emptyset}{\partial r}\ cos\theta \quad \text{-------(8)}$$

આમ $\emptyset$ ના મૂલ્યમાં થતો મહતમ ફેરફારનો દર, $\widehat{e_n}$ ની દિશામાં મળે છે. આ સદિશને $\widehat{e_n}\ \frac{\partial\emptyset}{\partial n}$ વડે દર્શાવાય છે. આ સદિશને P બિંદુ આગળનો અદિશ વિધેય $\emptyset\,(x, y, z)$ નો ગ્રેડીયન્ટ કહે છે.

Grad $\emptyset$ = $\widehat{e_n}\ \frac{\partial\emptyset}{\partial n}$ ------(9)

આમ, અદિશ ક્ષેત્રનો ગ્રેડીયન્ટ અદિશ છે.

સમી.(9) ની બંને બાજુ $\overrightarrow{dr}$ વડે અદિશ ગુણાકાર કરતાં,

(Grad $\emptyset$) $\overrightarrow{dr}$ = $\widehat{e_n}\ \frac{\partial\emptyset}{\partial n}$. $\overrightarrow{dr}$

= $\widehat{e_n}\ \frac{\partial\emptyset}{\partial n} dr\ cos\theta$

= $\frac{\partial\emptyset}{\partial n}\ dn$

(Grad $\emptyset$) $\overrightarrow{dr}$ = $d\emptyset$ ------(10) (સમી.(9)ના ઉપયોગથી)

પરંતુ સમી.(2) પ્રમાણે,

$$d\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial x}\ dx + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\ dy + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\ dz$$

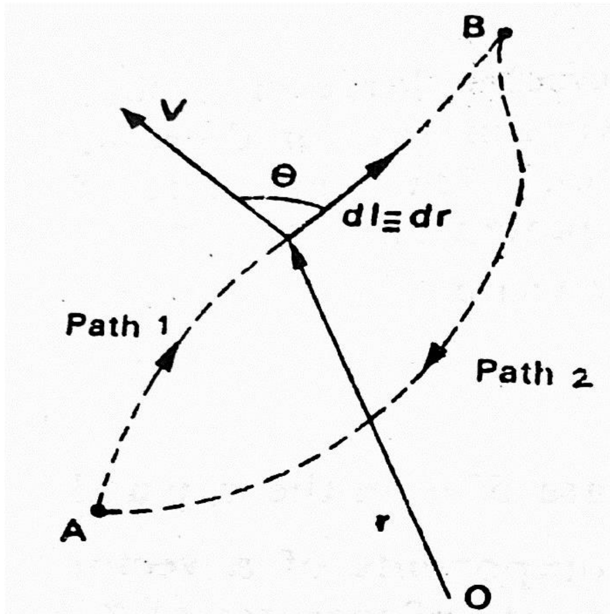
આથી, (Grad $\emptyset$) $\overrightarrow{dr}$ = $\frac{\partial\emptyset}{\partial x}\ dx + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\ dy + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\ dz$

(Grad $\emptyset$) $\overrightarrow{dr}$ = $(\nabla\,\emptyset)\ dr$

Grad $\emptyset$ = $\nabla\,\emptyset$ -----------(11)

આમ, જ્યારે ∇ (કારક) કોઇ અદિશ વિધેય પર લાગે ત્યારે સદિશ મળે છે. જેને $\emptyset$ નો ગ્રેડીયન્ટ કહે છે.

આમ, અદિશ ક્ષેત્રમાં કોઇ બિંદુ પાસે ગ્રેડીયન્ટ સદિશ મેળવીએ તો આ બિંદુ પાસે અદિશના ફેરફારનો દર ગ્રેડીયન્ટ સદિશની દિશામાં મહતમ હોય છે. અને તે મહતમ ફેરફારના દરનું મૂલ્ય ગ્રેડીયન્ટ સદિશના માન જેટલું હોય છે.



હવે આ સદિશ ક્ષેત્રને આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે બે બિદુંઓ A અને B નો વિચાર કરો.કોઇ પણ પથ 1 દ્વારા ચિહ્નિત કરતાં તેના માટે d1 નાનો ભાગ ધ્યાનમાં લો. પછી સદિશ V નુ સંકલન A થી B લેતાં,

$\int_A^B V \cdot d1 = \int_A^B (grad\, \emptyset\,) \cdot dr$

$= \int_A^B d\emptyset = \emptyset_A - \emptyset_B$ -----(12)

આકૃતિમાં એ સ્પષ્ટ છે કે d1 = dr. સમી.(12) પરથી $\emptyset_B$ અને $\emptyset_A$ અનુક્રમે B અને A પરના $\emptyset$ અદિશની કિંમતો છે. અંતિમ બિદુંઓ A અને B ચોક્કસ રેખાના અદિશ સંકલન $\emptyset$ નો ભાગ વિવિધ સ્વતંત્ર માર્ગો માટે સમાન મૂલ્ય ધરાવે છે. આમ, માર્ગ 2

$\int_A^B V \cdot dr = \int_A^B V \cdot d1 = \emptyset_A - \emptyset_B$ ---------(13)

તેથી બંધ માર્ગ ABA છે.

$$\oint V \cdot dr = 0$$

$$\oint (grad\, \emptyset\,) \cdot dr = 0$$

આમ, જ્યારે સદિશક્ષેત્ર એ અદિશક્ષેત્રનો ઢાળ તરીકે વ્યકત કરી શકાય છે. ત્યારે કોઇ પણ બે બિદુંઓ વચ્ચે લેવામાં આવેલી સદિશ રેખાનું સંકલન અનુસરવામાં આવેલા માર્ગથી સ્વતંત્ર હોય છે. અને તે માર્ગના છેડે અદિશ વિધેય ના મૂલ્યો વચ્ચેના તફાવત બરાબર હોય છે.સદિશક્ષેત્ર શૂન્ય છે. સદિશ V ને **લેમેલર સદિશ** પણ કહેવામાં આવે છે. કારણકે ક્ષેત્ર સ્તરો અથવા લેમિનામાં વહેચાયેલું

હોય છે. જેના પર અદિશ નું મૂલ્ય સ્થિર હોય છે. આ ક્ષેત્રને **ઇરોટેશનલ ક્ષેત્ર** પણ કહેવામાં આવે છે. કારણ કે કોઇ પણ બંધ માર્ગની આસપાસ કોરેસ-પોન્ડિંગ સદિશની રેખા શૂન્ય હોય છે.

સદિશ ક્ષેત્રનું ડાયવર્જન્સ (Divergence of a Vector):

અવકાશના જે વિસ્તારમાં સદિશ રાશિઓ વિતરીત થયેલી હોય તે વિસ્તારને તે રાશિનું સદિશ ક્ષેત્ર કહેવામાં આવે છે.

દા.ત. નદીના સમગ્ર વિસ્તાર પર જુદા જુદા બિંદુંઓ પાસે પાણીનો વેગ જુદોજુદો હોય છે. નદીના કિનારા પર પાણીનો વેગ થોડો આછો હોય છે. જ્યારે બે કિનારાની વચ્ચેના ભાગમાં પાણીનો વેગ વધારે હોય છે. નદી જ્યાં સાંકડી થતી હોય ત્યાં વેગ વધારે હોય છે. અને જે વિસ્તારમાં પહોળી હોય ત્યાં વેગ ઓછો હોય છે. આમ, નદીના સમગ્ર વિસ્તારમાં વેગ નામની સદિશ રાશિ વિતરીત થયેલી મળે છે.

આમ, પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષી ક્ષેત્રમાં ગુરુત્વક્ષેત્રની તીવ્રતા, વિધુતક્ષેત્ર તેમજ ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં વિધુતક્ષેત્રની તીવ્રતા અને ચુંબકીયક્ષેત્રની તીવ્રતાના મૂલ્યો અને દિશાઓ જુદાજુદા હોય છે.

કારક ∇ (નેબ્લા)ની વ્યાખ્યા પ્રમાણે સદિશક્ષેત્રના ડાઇવર્જન્સનું સૂત્ર

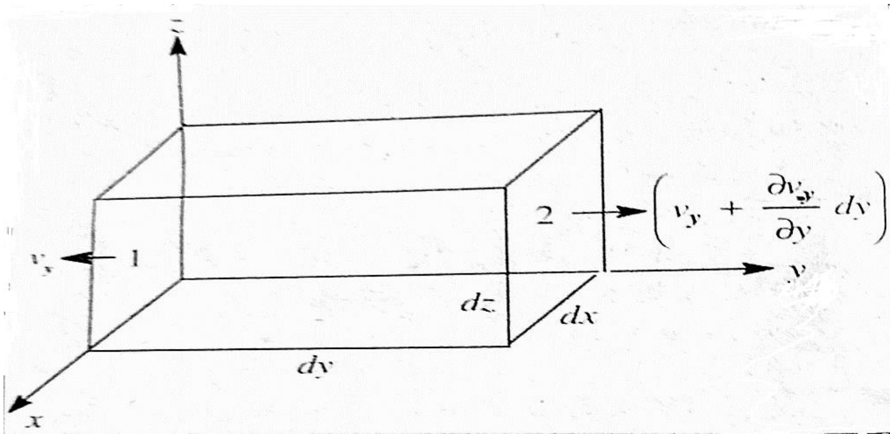
$$div\,\vec{v} = \nabla \cdot v = \left(\hat{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\hat{\imath}\,v_x + \hat{\jmath}\,v_y + \hat{k}\,v_z\right)$$

$$div\,\vec{v} = \nabla \cdot v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \text{-------(1)}$$

જ્યાં v_x , v_y અને v_z એ વેગ $\vec{v}$ ના x , y, z દિશામાંના ઘટકો છે. અને દિશામાં તે ઘટકોમં થતા ફેરફરોનો દર અનુક્રમે $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ અને $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ છે. $\nabla \cdot v$ ને સદિશ $\vec{v}$ નો ડાયવર્જન્સ કહે છે. તે અદિશ છે.

સમજૂતી : ડાયવર્જન્સની વ્યાખ્યાની ભૌતિક સાર્થકતા તેમજ તેની ઉપયોગીતા સમજવા માટે એક સાદું ઉદાહરણ લઇને ફલક્સ (Flux) એટલે શું તે સમજવાનો પ્રયત્ન કરીશું.

નદીના સમગ્ર વિસ્તારમાં તેના જુદા જુદા બિંદુંઓ પાસે પાણીનો વેગ જુદો જુદો હોય છે. જુદા જુદા બિંદુંઓ પાસેના પાણીના વેગના સદિશો એક સદિશ ક્ષેત્રનું નિર્માણ કરે છે તેમ કહી શકાય. કોઇ એક બિંદું પાસે પાણીનો વેગ $\vec{v}$ છે. **પાણીનો કોઇ પણ બિંદું પાસેનો વેગ એટલે તે બિંદું પાસેની વહનની દિશાને લંબ એવી એકમ ક્ષેત્રફળવાળી સપાટીમાંથી એક સેકન્ડમાં પસાર થતો પાણીનો જથ્થો. આને ફલક્સ કહે છે**. આમ, કોઇ સપાટી સાથે સંકળાયેલ ફલક્સ એટલે તે સપાટીમાંથી બહાર આવતો કે અંદર જતો કોઇક વસ્તુનો જથ્થો. પાણીની બાબતમાં ફલક્સ એટલે તે સપાટી સાથે સંકળાયેલી બળરેખાઓની સંખ્યા.



આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સદિશ ક્ષેત્રમાં એક લંબઘન મૂકેલો છે. આ લંબઘનના 0 બિંદું આગળ સદિશ વિધેય v(x, y, z) છે. તેવી લંબાઇ, પહોળાઇ, ઊંચાઇ dx , dy અને dz છે. આથી કદ ખંડ dτ = dx dy dz થશે. સદિશ વિધેય v ના ત્રણ ઘટકો v_x , v_y અને v_z અનુક્રમે x, y અને z અક્ષની દિશામાં છે. અને આજ દિશામાં વેગમાં થતા ફેરફારના દર $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ અને $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ છે.
આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમને સમતલ 1 અને સમતલ 2,Y અક્ષને લંબ છે. આ સમતલમાં વેગ v નો Y દિશાનો ઘટક અક્ષને v_y અને $v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy$ છે. આ કિંમતો ખૂબ નાની હોવાથી સમતલ પર અચળ રહે છે. તેમ માનવામાં આવે છે.
જો તરલનો વેગ $\vec{v}$ (small) અને ઘનતા ρ હોય તો $\vec{v} = \rho\,\vec{v}$. જે $\vec{v}$ ને લંબ એકમ ક્ષેત્રફળમાંથી દર સેકન્ડે પસાર થતા તરલનું દળ દર્શાવે છે. આ પ્રવાહને $\vec{v}$ સદિશનું ફલક્સ પણ કહે છે.
આમ, Y દિશામાં બહાર નીકળતો પરિણામે પ્રવાહ અથવા સદિશ $\vec{v}$ નો ફલક્સ

$$\left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy\right) dx\, dz - v_y\, dx\, dz = \frac{\partial v_y}{\partial y} dx\, dy\, dz$$

આજ પ્રમાણે X અને Z દિશામાં પરિણામી બહાર નીકળતો પ્રવાહ અથવા ફલક્સ અનુક્રમે

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} dx\, dy\, dz \quad \text{અને} \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} dx\, dy\, dz$$

આથી લંબઘનના કદખંડ (dτ) માંથી બહાર નીકળતો કુલ પ્રવાહ અથવા સંકળાયેલ ફલક્સ

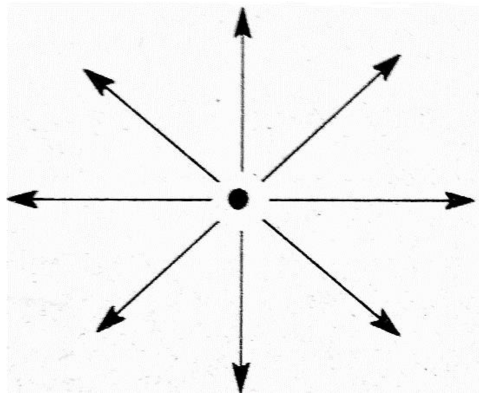
$$= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

$$= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) d\tau \qquad \text{---------(2)}$$

એકમ કદમાંથી બહાર નીકળતો પ્રવાહ અથવા સંકળાયેલ કુલ ફલક્સને $\vec{v}$ નો ડાયવર્જન્સ કહે છે.

$$\therefore\ div\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

જે સમી. (1) જેવું છે.



જો div v નું મૂલ્ય ધન હોય તો પરિણામી પ્રવાહ બહારની તરફ અને ઋણ હોય તો પરિણામી પ્રવાહ અંદરની તરફ હોય છે. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક બિંદું આગળથી દર્શાવતા ક્ષેત્ર સદિશો દૂર જતાં હોય તો આ બિંદું પાસે ડાયવર્જન્સ ધન હોય છે. અને જો સદિશો બિંદુ તરફ આવતા હોય તો ડાયવર્જન્સ ઋણ હોય છે.

આમ **વહેતા પ્રવાહીના કિસ્સામાં કોઇ પણ બિંદુ પાસેનો ડાયવર્જન્સ એટલે એ બિંદુ પાસેના એકમ કદમાંથી સેકન્ડમાં બહાર આવતા પ્રવાહીના ચોખ્ખા જથ્થાનું માપ છે.**

જો $div\,\vec{v} = 0$ હોય તો તરલનો કોઇ પ્રવાહ અંદરની તરફ કે બહારની તરફ થતો નથી. એટલે કે બંને તરફના પ્રવાહ એકબીજાને સમતોલે છે તેમ કહેવાય.

સમી.(2) ફરીથી લખતાં, $d\tau$ જેટલા કદખંડને ઘેરાતી સપાટી સાથે સંકળાયેલા કુલ ફલક્સને $(\nabla \cdot v)\, d\tau$ વડે દર્શાવી શકાય.

$\therefore$ ફલક્સ = $\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$ = $(\nabla \cdot v)\, d\tau$ -------(3)

જો આ કદ ખંડની સપાટી અનિયમિત આકારની હોય તો તેની સાથે સંકળાયેલ કુલ ફલક્સ શોધવા માટે સમગ્ર સપાટીને ખૂબ સૂક્ષ્મ પૃષ્ઠખંડોમાં વિભાગેલી કલ્પવામાં આવે છે.

સપાટીનું ક્ષેત્રફળ $\overrightarrow{d\sigma} = \hat{n}\, d\sigma$

સપાટીના કોઇ એક પૃષ્ઠ ખંડ સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ =$\vec{v} \cdot \hat{n}\, d\sigma$

સમગ્ર સપાટી સાથે સંકળાયેલ ફલક્સ = $\sum \vec{v} \cdot \hat{n} d\sigma$

અહીં બધા પૃષ્ઠો અત્યંત સૂક્ષ્મ લઇએ અને લઇએ તો ઉપરનો સરવાળો સંકલનમાં પરિણમે છે. આવા સંકલનને સદિશ ક્ષેત્રનું પૃષ્ઠ સંકલન કહે છે.

$\therefore \sum \vec{v} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \int \vec{v} \cdot \hat{n}\, d\sigma$ --------(4)

પૃષ્ઠ σ

સમી. (3) અને સમી. (4)

$$(\nabla \cdot \vec{v})\, d\tau = \int_{\text{પૃષ્ઠ } \sigma} \vec{v} \cdot \hat{n}\, d\sigma \qquad \text{---------(5)}$$

સમી. (5)ની ડા.બા. $(\nabla \cdot \vec{v})$ એ $d\tau$ કદ ખંડમાંના જુદા જુદા બિદું પાસેના ડાયવર્જન્સનો સરેરાશ છે, જો $d\tau \to 0$ સૂક્ષ્મ બને તેમ લક્ષ લઇએ તો

$$(\nabla \cdot \vec{v}) = \lim_{d\tau \to 0} \frac{\int \vec{v} \cdot \hat{n}\, d\sigma}{d\tau} \qquad \text{------------(6)}$$

આ સમી. પણ ડાયવર્જન્સની વ્યાખ્યા દર્શાવે છે.

જો $div\, \vec{v} = div \rho \vec{v} = 0$ હોયતો $d\tau$ કદમાંથી પસાર થતું પરિણામી પ્રવાહ અચલ હોય છે. એટલે કે તરલની ઘનતા અચળ રહે છે. જે પ્રવાહનું સંરક્ષણ(conserved) દર્શાવે છે.

હવે એક સેકન્ડમાં $\nabla \cdot \vec{v}$ જેટલો જથ્થો એકમ કદમાંથી બહાર નીકળે તો એકમ કદ દીઠ પ્રવાહીનું દળ ઘટતું જાય છે. પરિણામે પ્રવાહીનો ઘનતાનો દર $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ તે બિંદુ પાસે ઘટે છે.

આથી, $\nabla \cdot \vec{v} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \text{---------(7)}$$

આ સમી.(7)ને સાતત્યનું સમીકરણ કહે છે. અને તે પ્રવાહીના જથ્થાના સંરક્ષણના સિધ્ધાંત રજૂ કરે છે.જો પ્રવાહી તેની ઘનતા બદલવામાં અસમર્થ હોય તો ρ = અચળ થશે અને $div\, \vec{v} = div \rho \vec{v} = 0$ મળશે.જો કે પ્રવાહીના કેટલાક સ્ત્રોતો અથવા જથ્થા $d\tau$ માં ડૂબી શકે છે. તેના માટે સમી. (7) સુધારવાની જરૂર છે. અહીં ψ(x,y,z) એકમ સમય દીઠ પ્રવાહીના જથ્થાના સર્જનના ચોખ્ખા દરનું પ્રતિનિધિ કરે છે. પ્રવાહીના સર્જન અને વિનાશ માટે કોઇ તકલીફ ન હોવી જોઇએ. સર્જનનો અર્થ એ થાય કે પ્રવાહીની પધ્ધતિમાં વિચાર.

[(પ્રવાહીના બહારનો દર) – (પ્રવાહીના નિર્માણનો દર)] = પ્રવાહીના ઘટાડાનો દર -----(8)

અથવા કદ $d\tau$ માટે $\nabla \cdot V\, d\tau - \varphi\, d\tau = -\frac{d\rho}{st}\, d\tau$

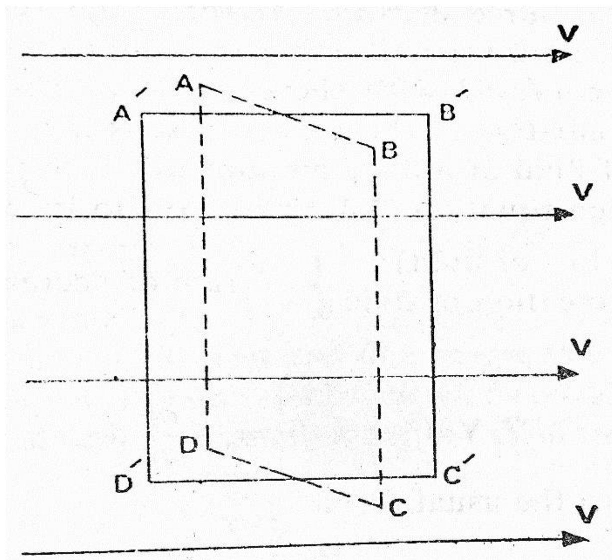
આને સામાન્ય સ્વરૂપમાં મૂકી શકાય છે.

$$\nabla \cdot V + \frac{d\rho}{dt} = \varphi \qquad \text{--------(9)}$$

જ્યારે સમી. (9) સાતત્ય (7) ના સમીકરણમાં ઘટાડો કરે છે.

કર્લ – એ સદિશ વિધેય (Curl of a vector Point Function):

આપણ જાણીએ છીએ કે જ્યારે સદિશ ક્ષેત્ર એ અદિશ ક્ષેત્રનો ગ્રેડિયન્ટ વ્યક્ત કરતો હોયતો બંધ પથની સાથે સદિશનું રેખા સંકલન શૂન્ય હોય છે. આ પરિણામ એ વાસ્તવિક પથથી સ્વતંત્ર છે જો કે આવા સદિશ ક્ષેત્ર ને ભૌતિકશાસ્ત્રમાં સદિશ ક્ષેત્રની સંખ્યાનું નામ આપવામાં આવ્યું હતું. જેમાં આ ગુણધર્મનું અવલોકન કરવામાં આવ્યું નથી.



આવા સદિશ ક્ષેત્રના નાના ક્ષેત્રને ધ્યાનમાં લો. (આકૃતિ) આ ક્ષેત્રમાં સરળતા ખાતર ધારો કે આપેલ સદિશ પાસે તમામ બિદુંઓ પર સમાન દિશામાં છે પરંતુ વિવિધ બિદુંઓ પર જુદા જુદા ક્ષેત્રમાં હવે અનુકુળતા માટે લંબચોરસ પથ ધ્યાનમાં લઇએ કે લંબચોરસનું સમતલ ABCD ની દિશામાં લંબરૂપ છે તો આ પથ સાથે રેખા સંકલન $\oint V \cdot d\tau$ શૂન્ય છે. કારણકે સર્વત્ર $d\tau$ માટે કાટખૂણે છે. ધારો કે લંબચોરસ વિસ્તારનું સમતલ V સદિશ ની દિશા સાથે સમાંતર બનાવવામાં આવ્યું છે. પછી બંધ પથ A' B' C' D' પર મર્યાદિત મૂલ્ય હશે. આ વાક્ય રેખા સંકલન $\oint V \cdot d\tau$ નું પરિણામ સદિશ V ના સંદર્ભમાં તેના લક્ષ્ય પર આધારિત છે.

આ રેખા સંકલનનું મહતમ મૂલ્ય જે એકમ ક્ષેત્રફળ દર્શાવે છે જે બંધ માર્ગના સંકલનને તે સદિશ ક્ષેત્રના બિદુંને કર્લ કહે છે. સદિશ V નું કર્લ તે દિશામાં દોરેલું સદિશ છે. જે સ્થિતિમાં રેખા સંકલનનું મહતમ મૂલ્ય પ્રાપ્ત થાય છે. કેટલાક પુસ્તકોમાં પરિભ્રમણ (સંક્ષિપ્તમાં રોટ) શબ્દનો ઉપયોગ થાય છે.

સદિશ ક્ષેત્ર $\vec{v}$ ના કર્લની વ્યાખ્યા ∇ ઓપરેટરની મદદથી નીચે પ્રમાણે આપી શકાય

$$curl\,\overrightarrow{v} = \nabla \times \vec{v}$$

હવે ∇ ને $\left(\hat{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)$ સદિશ તરીકે દર્શાવતાં,

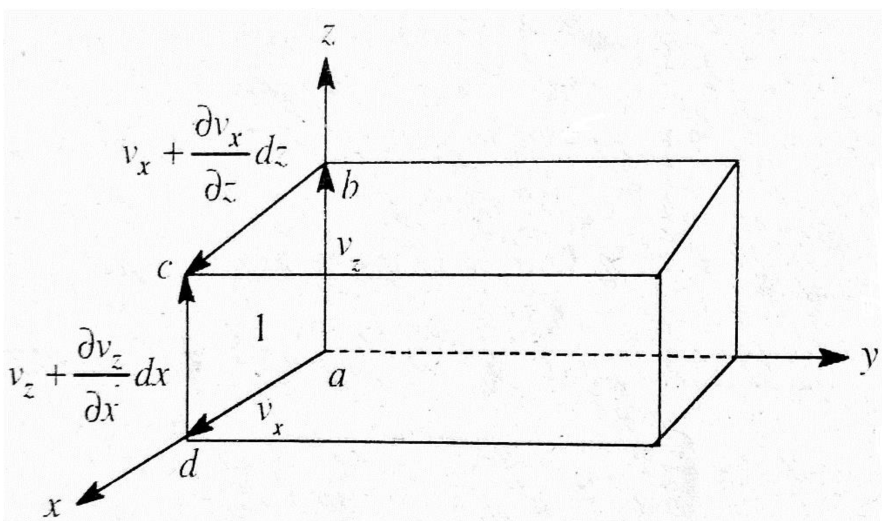
$$curl\,\overrightarrow{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$\therefore curl\,\vec{v} = \hat{\imath}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) - \hat{\jmath}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$$

$$curl\,\vec{v} = \hat{\imath}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$$

આમ, $\nabla \times \vec{v}$ ને સદિશ ક્ષેત્ર v(x,y,z) નો કર્લ કહે છે.

સમજૂતી :



આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સદિશ ક્ષેત્ર $\vec{v}$ ના X, Y, Z અક્ષોને અનુલક્ષીને તે દિશામાં તેના ઘટકો v_x , v_y અને v_z છે. અનુક્રમે y, x,.... દિશામાં વેગના ઘટકો v_x , v_y … …માં થતો ફેરફારનો દર $\frac{\partial v_x}{\partial y}$, $\frac{\partial v_y}{\partial x}$ ......વડે દર્શાવાય છે. આકૃતિમાં ઉગમબિદું y=0 આગળ એક લંબચોરસ માર્ગ a b c d સદિશ ક્ષેત્ર v ના y ઘટકને લંબ છે.કે જે સમતલ 1 વદે દર્શાવેલ છે.

સમતલ 1ની ad, bc, ab અને dc રેખા પર સદિશ ક્ષેત્ર v ના x અને z દિશાના ઘટકો અનુક્રમે $V_x , V_x + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz, V_z, V_z + \frac{\partial v_z}{\partial x}\, dx$ થશે.

આથી a b c d માર્ગ પર કુલ રેખા સંકલન

$$= v_z dz + \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz\right) dx - \left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial x} dx\right) dz - v_x dx$$

cd અને da માર્ગને લીધે રેખા સંકલનમાં ઋણ નિશાની છે. કારણ કે તેની દિશા ઘટકો કરતાં વિરૂધ્ધ છે. આ રેખા સંકલનનું મૂલ્ય મહતમ ત્યારે જ થશે કે જ્યારે ab, bc, cd અને da તેના સદિશને સમાંતર કે અસમાંતર (Parallel or Anti-parallel) હોય છે.

સંકેતમાં , $$\oint_{1,2,3,4} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dl} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) dxdz$$

આ રેખા સંકલનનું મૂલ્ય દર એકમ ક્ષેત્રફળ y અક્ષને લંબ હોવાથી curl ના સ્વરૂપમાં લખતાં

$$curl_y \ \vec{v} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \quad \text{--------(1)}$$

આ જ x અને z અક્ષને લંબ આપેલા સમતલ (લંબચોરસ માર્ગ) માટે રેખા સંકલનની ગણતરી કરી શકાય.

$$curl_x \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \quad \text{----------(2)}$$

$$curl_z \vec{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \quad \text{---------(3)}$$

સદિશીય રીતે આ ત્રણેય ઘટકોનો સરવાળો કરતાં,

$$curl\, \vec{v} = \hat{\imath}\, curl_x \vec{v} + \hat{\jmath}\, curl_y \vec{v} + \hat{k}\, curl_z \vec{v}$$

Or

$$curl\, \vec{v} = \hat{\imath} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \hat{\jmath} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \hat{k} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \quad \text{-----(4)}$$

આમ, સમી.(4) ને નીચે પ્રમાણે નિશ્ર્યાયકના સ્વરૂપમાં લખી શકાય.

$$curl\, \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad \text{--------(5)}$$

$$curl\, \overrightarrow{v} = \nabla \times \vec{v}$$

જો $curl\, \overrightarrow{v} = 0$ હોય તો સદિશ $\vec{v}$ ને irrotational vector કહે છે. દા.ત. Gravitational અને Electrostatic fields એ irrotational fields છે.

સદિશ વિકલન ઓપરેટર ∇ વિશેની માહિતી(More about the vector Differential Operator ∇):

યાદ રાખવું જોઇએ કે ∇ સદિશ વિકલન ઓપરેટર છે.અને તેને સદિશ વિધેય ઉપર ઓપરેટ કરવાથી અદિશ વિધેયનું ડાયવર્જન મળે છે અથવા સદિશ વિધેયનું કર્લ મળે છે. વળી જો સદિશ V ની સાથે ડૉટ પ્રોડ્ક્ટ કરીએ તો ,

$$V \cdot \nabla = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \qquad \text{--------(1)}$$

અને તે અદિશ ઓપરેટર છે. આ સમી. (1) ને સદિશ અને અદિશ ઉપર ઓપરેટ કરી શકાય. પરંતુ નીચેના સમી. ને સદિશ Vનું ડાયવર્જન અને તેને અદિશ રાશીનું પ્રતિનિધિ કરે છે.

$$\nabla \cdot V = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

ફરી થી,

$$V \times \nabla = \hat{\imath}\left(V_y \frac{\partial}{\partial z} - V_z \frac{\partial}{\partial y}\right) + \hat{\jmath}\left(V_z \frac{\partial}{\partial x} - V_x \frac{\partial}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(V_x \frac{\partial}{\partial y} - V_y \frac{\partial}{\partial x}\right) \quad \text{-----(2)}$$

અથવા સામાન્ય રીતે

$$(V \times \nabla)_i = V_j \frac{\partial}{\partial x_k} - V_k \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad \text{--------(3)}$$

જ્યાં I j અને k એ 1,2 અને 3 ના સમઘડી ક્રમ દર્શાવે છે. (માટે x_1= x, x_2=y અને x_3=z તેજ રીતે $V_1=V_x$, $V_2=V_y$ અને $V_3=V_z$) સમી. (2) સદિશ વિકલન ઓપરેટર દર્શાવે છે. તેને પણ સદિશ અને અદિશ વિધેય પર ઓપરેટ કરી શકાય.

સામાન્ય રીતે સદિશ વિકલન ઓપરેટર એ યાદ રાખાવા જેવો છે. કારણ કે $V \times \nabla$ તે સદિશ છે. તેમાં $V \times \nabla$ સદિશ વિક્લન ઓપરેટરમાં કર્લ V છે. જ્યારે ∇ ને ઓપરેટ કરીએ ત્યારે બે વિધેય મળે છે.જો બે વિધેય ઉપર ફરજીયાત ઓપરેટ કરીએ તો નવા પ્રકારની સૂત્ર મળે છે. જે નીચે છે.

$$\nabla \times Af(r) = \nabla_A \times Af(r) + \nabla_f \times Af(r) \quad \text{---------(4)}$$

આ ∇_A સંજ્ઞા એ ∇ ઓપરેટર ફક્ત સદિશ A નો જ છે તેમ દર્શાવે છે. જ્યારે ∇_f એ ∇ ઓપરેટર ફક્ત ∇_f માટે.

સમી.(4) ને ફરીથી લખતાં,

$$\begin{aligned} \nabla \times Af(r) &= (\nabla \times A)f(r) + [\nabla f(r)] \times A \\ &= f(r)\nabla \times A + \nabla f(r) \times A \qquad \text{-----------(5)} \end{aligned}$$

સમી.(5) માં કૌસનો કોઇ અર્થ ન હોવાથી તેને રદ કરતાં

માટે $\nabla \times (A \times B)$ ઓપરેટરની રજૂઆત દર્શાવતાં

$$\nabla \times (A \times B) = \nabla_A \times (A \times B) + \nabla_B \times (A \times B) \qquad \text{--------(6)}$$

હવે ત્રણ સદિશોના ગુણાકારનો ઉપયોગ કરીને લખતાં,

$\nabla \times (A \times B) = A(B \cdot \nabla_A) - B(\nabla_A \cdot A) + A(\nabla_B \cdot B) - B(A \cdot \nabla_B)$
અથવા $\nabla \times (A \times B) = (B \cdot \nabla)A - B(\nabla \cdot A) + A(\nabla \cdot B) - (A \cdot \nabla)B$ --------(7)

સમી.(7) ના પ્રત્યયો દૂર કરતાં $B \cdot \nabla$ અને $A \cdot \nabla$ ઓરેટર છે. જે A અનેB સદિશઓ માટે છે. એટલે કે ડાબી બાજુ નો સદિશ અને જમણી બાજુનો સદિશ એક જ છે. માટે A અને B પ્રથમ અને છેલ્લા ભાગ તે જમણી બાજુમાં ફરીથી ગોઠવેલ સદિશો જ છે.

વિવિધ પ્રકારના ડેલ ઓપરેશનો (Multiple Del Operations):

આપણે સાબિત કરી ગયા છીએ કે ગ્રેડિયન્ટ એટલે અદિશ વિધેય, અને ડાયવર્જન અને કર્લ એ સદિશ વિધેય છે. હવે આપને ફરીથી ડેલ ઓપરેટરને જુદાજુદા ઓપરેશનોમાં જોઇએ.

(a) $div\ grad\ \emptyset = \nabla \cdot \nabla \emptyset$

(b) $curl\ grad\ \emptyset = \nabla \times \nabla\emptyset$

(c) $grad\ div\ V = \nabla (\nabla \cdot V)$

(d) $div\ curl\ V = \nabla \cdot (\nabla \times V)$

(e) $curl\ curl\ V = \nabla \times (\nabla \times V)$

(f) $Laplacian\ V = \nabla \cdot \nabla V$

-------------(1)

ઉપરના 6 સમીકરણો એ દ્રિતિય ક્રમના વિકલનો છે ,સાથે સાથે ભૌતિકશાસ્ત્રમાં ઇલેક્ટ્રોડાયનેમિક્સ માં આવતા દ્રિતિય ક્રમના વિકલિત સમીકરણો છે.

ઉપરના (a) થી (f) બીજા ક્રમના વિકલિત ઓપરેટરને લાપલાસીયન કહે છે. અદિશ ઓપરેટરને નીચે પ્રમાણે દર્શાવાય છે.

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{-------(2)}$$

લાપલાસીયન ઓપરેટરને અદિશ વિધેય $\emptyset$ થી સમી.(a) ને અને સદિશ વિધેય V થી સમી.(f) ને ઓપરેટ કરીએ તો અદિશ અને સદિશ મળે છે.

$$div\ grad\ \emptyset = \nabla \cdot \nabla\emptyset = \nabla^2\emptyset = \frac{\partial^2\emptyset}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\emptyset}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\emptyset}{\partial z^2} \quad \text{---------(3)}$$

અને $\nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ ------------(4)

થિયોરીકલ ભૌતિકશાસ્ત્રમાં સમીકરણોમાં ખૂબ મોટા પ્રમાણમાં લાપલાસીયન ઓપરેટર હોય છે. તેમાંના કેટલાક લાપલાસીયન ઓપરેટર નીચે મુજબ છે.

(i) $\nabla^2 \emptyset = 0$ લાપલાસીયન સમીકરણ

(ii) $\nabla^2 \emptyset = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ પોઇસન સમીકરણ

(iii) $\nabla^2 \emptyset = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial t^2}$ તરંગ સમીકરણ

(iv) $\nabla^2 \emptyset = \frac{1}{h^2} \frac{\partial \emptyset}{\partial t}$ ઉષ્માવહનનું સમીકરણ

(v) $\nabla^2 \emptyset = \frac{2m}{\hbar^2} (V - E)\emptyset$ શ્રોડીન્જર સમીકરણ

સમી.(b) $curl\ grad\ \emptyset$ ના ઓપરેશનનો ઉલ્લેખ કરતાં,

$$curl\ grad\ \emptyset = \nabla \times (\nabla \emptyset)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \emptyset}{\partial x} & \frac{\partial \emptyset}{\partial y} & \frac{\partial \emptyset}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= i\left(\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial z \partial y}\right) + j\left(\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x \partial z}\right) + k\left(\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x \partial y}\right)$$

અથવા $curl\ (\ grad\ \emptyset) = 0$ ---------(5)

લખેલ સમી.(5) માં એમ માની લીધું છે કે આંશિક વિભાજનનો ક્રમ એકબીજા સાથે બદલી શકાય છે અને જો $\emptyset$ ના બીજા ક્રમના આંશિક ભાગો દલીલ x, y, z ની સતત ક્રિયાઓ છે.

સમી.(c) ઉલ્લેખ કરેલ ઓપરેશન ગ્રેડ-ડાયવર્જન V એ સદિશ છે. અને (c) માં ઉલ્લેખ કરેલ કર્લ Vના વિસ્તારમાં દેખાય છે.

હવે, $curl\ curl\ V = \nabla \times \nabla \times V$

$$= \nabla (\nabla \cdot \mathrm{V}) - \nabla \cdot \nabla V$$ ----------------(6)

અથવા $curl\ curl\ V = grad\ div\ V - \nabla^2 V$

ઓપરેશન ગ્રેડ-ડાયવર્જન V તરીકે લખી શકાય છે.

$$\nabla (\nabla \cdot \mathrm{V}) = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right)$$

$$= i\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial z}\right) + j\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y \partial z}\right) + k\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)$$ -----------(7)

અભિવ્યક્તિમા (f) જેમકે $\nabla \cdot \nabla V, \nabla V$ એક ડાયડિક અને ડાયવર્જન્સ જેવું એક સદિશ છે.

ઓપરેશન ડાયવર્જન-કર્લ V એ અદિશ છે. અને તેને ત્રણ અદિશોના ગુણાકારથી દર્શાવતાં,

$$\nabla \cdot \nabla \times V = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

અથવા $\nabla \cdot \nabla \times V = 0$ ------------(8)

અપરિભ્રમણ અને સોલેનોઇડલ સદિશો (Irrotational and Solenoidal Vectors):

આપણે પહેલાંથી જાણીએ છીએ કે સદિશ V સોલેનોઇડલ છે. જો,

$$div\, V = \nabla \cdot V = 0$$

પરંતુ સદિશના ડાયવર્જનનું કર્લ શૂન્ય છે.દા.ત. $\nabla \cdot \nabla \times A = 0$ જે સમી.(8) પ્રમાણે. માટે સોલેનોઇડલ સદિશ હમેશાં સદિશ વિધેયનું કર્લ રજૂ કરે છે. આ સદિશ વિધેયને સદિશ સ્થિતિમાન કહે છે.

ઉદાહરણ તરીકે ચુંબકીય પ્રેરણ B, $\nabla \cdot B = 0$ માટે,

B $= \nabla \times A$ --------(9)

જ્યાં A ને ચુંબકીય સદિશ સ્થિતિમાન કહે છે. સદિશ સ્થિતિમાન A એક જ નથી. ધારોકે તેમાં બીજો ગ્રેડ Ø થી સદિશ A લઇએ તો,

$B' = \nabla \times [A + grad\, \emptyset] = \nabla \times A + \nabla \times \nabla \emptyset$ ----------------(10)

પરંતુ $\nabla \times \nabla \emptyset = 0$ આ સમી.(5)નું સાદું સ્વરૂપ છે. માટે આ B $= \nabla \times A$ મળે.

હવે જો આપણે નોંધીએ કે સદિશ V પરિભ્રમણ કરતો નથી તો curl V = $\nabla \times V = 0$. પરંતુ સાથે અદિશ નું કર્લ નું ગ્રેડીયન્ટ હમેશાં શૂન્ય છે.દા.ત. $\nabla \times \nabla \emptyset = 0$ જે સમી. (5) પ્રમાણે. અપરિભ્રમણ કરતા સદિશ V હમેશાં અદિશ વિધેયનું ગ્રેડીયન્ટ રજુ કરે છે.તેથી V = $\nabla \emptyset = grad\, \emptyset$. આ અદિશ વિધેય Ø ને અદિશ સ્થિતિમાન કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે ગુરુત્વાકર્ષણ ક્ષેત્ર અથવા ઇલેક્ટ્રોસ્ટેટિસ્ટીક ક્ષેત્ર (વિધુતક્ષેત્ર)ના કિસ્સામાં જોતાં

$\nabla \times E = 0 \quad or \quad E = -\nabla \emptyset$ ----------(11)

અહીં ઋણ નિશાની દર્શાવે છે કે સદિશ E ના r માં જેમ Ø ઘટતું જાય છે તેમ dr વધતું જાય છે. સ્થિતિમાન Ø એ અચળ નથી કારણકે અદિશ અચળાંક વિધેય c થી Ø ઉમેરતાં બદલાય છે.

$-\nabla(\emptyset + c) = -\nabla\emptyset = E$

હવે વિવિધ પ્રકારના ડેલ ઓપરેશના ઉપયોગને સમજવા બે ઉદાહરણ જોઇએ.

ઉ.દા.-1 શોધો $\boldsymbol{\nabla \cdot \nabla f(r)}$ **જ્યાં** $\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

આપણે લખીએ કે $\nabla f(r) = i\ \frac{\partial f(r)}{\partial x} + j\ \frac{\partial f(r)}{\partial y} + k\ \frac{\partial f(r)}{\partial z}$

પરંતુ $\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\ \frac{\partial f(r)}{\partial x}$ ત્યાર પછી $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$

માટે, $\boldsymbol{\nabla} f(r) = \boldsymbol{i}\ \frac{x}{r}\ \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \boldsymbol{j}\ \frac{y}{r}\ \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \boldsymbol{k}\ \frac{z}{r}\ \frac{\partial f(r)}{\partial r}$

$= \frac{\boldsymbol{r}}{r}\ \frac{\partial f(r)}{\partial r}$

માટે, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} f(r) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} \frac{\partial f(r)}{\partial r}$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{r}\ \frac{\partial f(r)}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{r}\ \frac{\partial f(r)}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{z}{r}\ \frac{\partial f(r)}{\partial r}\right]$$

હવે સમી.ના જમણી બાજુના પ્રથમ પદનું સાદુરૂપ આપતાં,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{r}\ \frac{\partial f(r)}{\partial r}\right] = \frac{1}{r}\ \frac{\partial f(r)}{\partial r} - \frac{x}{r^2}\ \frac{\partial r}{\partial x}\ \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{x}{r}\ \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}\ \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{r}\ \frac{\partial f(r)}{\partial r} - \frac{x^2}{r^2}\ \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{x^2}{r^2}\ \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}$$

તેજે રીતે બીજા પદોને x, y અને z સાથે ચલિત કરી સાદુરૂપ આપતાં,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} f(r) = \frac{3}{r}\ \frac{\partial f(r)}{\partial r} - \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{r^3}\ \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{r^2}\ \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}$$

$= \frac{2}{r}\ \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}$

જો $f(r) = r^n$ હોય તો

$\nabla \cdot \nabla(r^n) = \nabla^2 r^n = \frac{2}{r}\ n r^{n-1} + n(n-1) r^{n-2}$

$= n\ (n+1) r^{n-2}$

જો n=0 હોય તો $f(r)$ = અચળ $\nabla \cdot \nabla f(r) = 0$

જો n=-1 હોય તો $f(r) = \frac{1}{r}$ અને $r \neq 0$

$\nabla \cdot \nabla f(r) = \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = 0$

પરંતુ $\nabla^2 f(r) = 0$ સમી. લાપલાસીયન સમીકરણ છે. માટે $f(r) = \frac{1}{r}$ એ લાપલાસીયન સમી. નો ઉકેલ છે.

ઉ.દા.-2 $\boldsymbol{\nabla \times A = V}$ **છે. તો સદિશ A શોધો.જ્યાં** $\boldsymbol{V = i(x^2 + 2yz) + j\,2yz - k(z^2 + 2zx)}$

પહેલાં આપણે V નો ડાયવર્જન શોધીએ

$$Div\,V = \frac{\partial}{\partial x}\,(\,x^r + 2yz) + \frac{\partial}{\partial y}\,(2yz) + \frac{\partial}{\partial z}\,\{-\,(z^2 + 2zx)\}$$

$$= 2x + 2z - 2z - 2x = 0$$

આ દર્શાવે છે કે સદિશ V એ સોલેનોઇડલ છે. સદિશ V ને વિશિષ્ટ રીતે ન સમજાવી શકાય માટે y અને z યામોને ખાસ A_x=0 ની કિસ્સામાં લેતાં અને curl A=V નો ઉપયોગ કરતાં,

$$curl_y\,A = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = 2yz$$

અને $curl_z\,A = \frac{\partial A_y}{\partial x} = -(z^2 + 2zx)$

સંકલન કરતાં, $A_z = -2yzx + C_1(y, z)$

અને $A_y = -(z^2x + zx^2) + C_2(y, z)$

જ્યાં C_1 અને C_2 સંકલન અચળાકો છે જે y અને z ઉપર આધારીત છે.

હવે V ના x યામ લઇએ,

$$V_x = x^2 + 2yz$$

$$= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

માટે $V_x = -2zx + \frac{\partial C_1}{\partial y} + 2zx + x^2 - \frac{\partial C_2}{\partial z}$

સમીકરણ V_x ના મૂલ્યો લેતાં

$$x^2 + 2yz = \frac{\partial C_1}{\partial y} + x^2 - \frac{\partial C_2}{\partial z}$$

આ સમીકરણ ત્યારે જ સંતોષાય કે જ્યારે $C_1 = 0,\ C_2 = -yz^2$ અથવા $C_1 = y^2z,\ C_2 = 0$ અથવા $C_1 = 1/2\ y^2z\ ,\ C_2 = 1/2\ yz^2$

તેથી સદિશ ને દર્શાવવાની નીચે મુજબની એક જ પસંદગી રહે.

$A = -j\,(\,z^2x + zx^2\,) - k\,(\,2xyz - y^2z\,)$

કેટલાક ઉપયોગી સમીકરણો(ઓળખો)(Some Useful Identities):

નીચેના કેટલાક ઉપયોગી સમીકરણો કે જેને સરળતાથી સાબિત કરી શકાય છે.

1. $grad\,(\emptyset\varphi) = \emptyset\,grad\varphi + \varphi\,grad\emptyset$

2. $div\ (\emptyset\, A) = grad\ \emptyset \cdot A + \emptyset\ div\ A$
3. $curl\ (\emptyset\, A) = grad\ \emptyset\ \times A + \emptyset\ curl\ A.$
4. $grad\ (A \cdot B) = (A \cdot grad)B + (B \cdot grad)A + A\ \times curlB + B \times curlA$
5. $div\ (A \times B) = B\ \cdot curl\ A - A\ \cdot curl\ B.$
6. $curl\ (A\ \times B) = A(\,divB) - B(div\ A) + (B \cdot grad\ A) - (A \cdot grad)B.$
7. $curl\ grad\ \emptyset = \nabla \times \nabla\,\emptyset = 0$
8. $div\ curl\ A = \nabla \cdot \nabla \times A = 0$
9. $curl\ curl\ A = \nabla \times \nabla \times A = \nabla\,(\nabla \cdot A\,) - \nabla^2 A$

   $= grad\ div\ A - Laplacian\ A$
10. $div\ (\,grad\ \emptyset\ \times grad\ \varphi\,) = \nabla \cdot (\nabla\,\emptyset\ \times \nabla\varphi) = 0$

ગૉસનો પ્રમેય (Gauss's Theorem) :

ગૉસનો ડાયવર્જન પ્રમેય એ સદિશ બીજગણિતનો એક મહત્વનો પ્રમેય છે અને તે કદ સંકલનની સાથે પૃષ્ઠ સંકલન સંબંધ દર્શાવે છે.

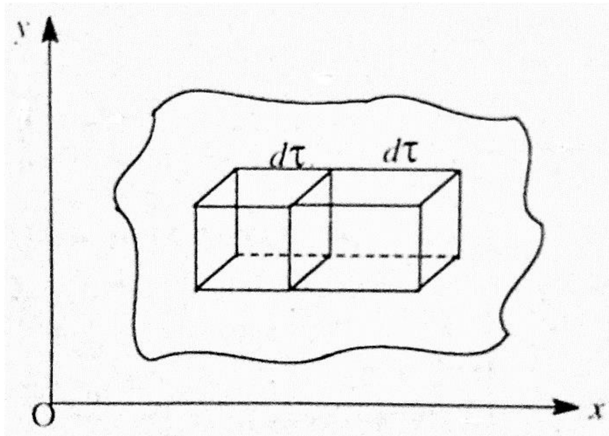
કથન : " કોઇ પણ સદિશ ક્ષેત્ર ના ડાયવર્જનનું અમુક કદ (τ) પર લીધેલું કદ સંકલન તે કદ(τ) ને ઘેરતા પૃષ્ઠ પરના તે સદિશના પૃષ્ઠ સંકલન જેટલું હોય છે."

$$\int_{\text{કદ } \tau} \nabla \cdot \vec{v}\ d\tau = \int_{\text{કદ } \tau} div \cdot \vec{v}\ d\tau = \int_{\text{પૃષ્ઠ } \sigma} \vec{v}\, d\sigma \qquad \text{-----------(1)}$$

જ્યાં $d\tau = dx\,dy\,dz$ કદખંડ છે.

અને $d\sigma =$ ક્ષેત્રફળનો સદિશ ખંડ છે.

સાબિતી: આકૃતિ (1)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક પરિમિત કદ τ ધ્યાનમાં લો અને કદને જુદાજુદા કદખંડ $d\tau_i$ માં વિભાગેલો કલ્પો. કદખંડ $d\tau_i$ માંથી સદિશ $\vec{v}$નો બહાર નીકળતો ફલકસ અથવા દરેક કદખંડમાંથી બહાર નીકળતો ફલકસ $\nabla \cdot v\ d\tau_i$ થશે.



આથી બધા કદખંડોને ઘેરતી સપાટીઓ સાથે સંકળાયેલા ફલકસનો સરવાળો

$\sum_i \nabla \cdot v \, d\tau_i$ ------------(2)

આકૃતિ(1) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બે નજીકના કદખંડ 1 અને કદખંડ 2 વિચારો. બંને કદખંડની સામાન્ય સપાટી પાસે કદખંડ 1 માંથી બહાર નીકળતો પ્રવાહ બીજા કદખંડ માટે અંદર દાખલ થતો થશે. આમ, સરવાળો કરતાં એકબીજાની અસર નાબૂદ કરશે. એટલે કે પાસે પાસેના કદખંડોની સહિયારી સપાટીઓ સાથે સંકળાયેલા ફલકસ એકબીજાને નાબૂદ કરતા હોવાથી સમી.(2)માં દર્શાવેલ કદ τ ને ઘેરતી સપાટી સાથે સંકળાયેલ ફલકસ આપે છે.

$\sum_{\text{કદ } \tau}(\nabla \cdot \vec{v})d\tau = \int \vec{v} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \int \vec{v}\ d\sigma$ -----------(3)

પૃષ્ઠ σ σ

જો $d\tau_i \rightarrow 0$ લઇએ તો સમી. ની ડાબી બાજુ કદ સંકલનમાં પરિણમે છે.

$\int(\nabla \cdot \vec{v})d\tau = \int \vec{v} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \int \vec{v}\, d\sigma$ ---------(4)

કદ τ પૃષ્ઠ σ પૃષ્ઠ σ

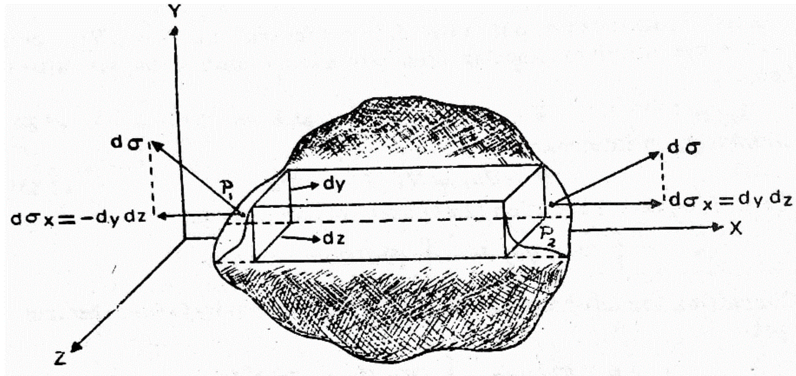
આ પરિણામને ગૉસનું પ્રમેય કહે છે.

વધુ સખત પુરાવા પણ આપી શકાય છે.

આપણે લખતાં,

$\int \nabla \cdot \text{V} d\tau = \iiint \frac{\partial V_x}{\partial x}\, dxdydz + \iiint \frac{\partial V_y}{\partial y}\, dxdydz + \iiint \frac{\partial V_z}{\partial z}\, dxdydz$ --------(5)

સમીકરણ(5)ની જમણી બાજુના પ્રથમ પદને ધ્યાનમાં લો X ના સંદર્ભમાં સંકલિત એટલે કે ક્રોસ સેકશન dy dz ની પટ્ટી સાથે P_1 થી P_2 સુધી વિસ્તરેલી છે. જે બાઉન્ડિંગ સપાટી પર છે. આપણેને મળે છે.



$\iiint \frac{\partial V_x}{\partial x}\, dxdydz = \iint \{V_x\,(x_2\,,y,z) - V_x(\,x_1,y,z)\}dydz$ --------(6)

જ્યાં $(\,x_1,y,z)$ અને $(\,x_2\,,y,z)$ એ બિંદું P_1 અને P_2 ના સંકલન બિંદુંઓ છે.

હવે બિંદું P_1 માટે, dy dz =- $d\sigma_x$

અને બિંદું P_2 માટે, dy dz =+ $d\sigma_x$

આ બધા મૂલ્યોને સમી. (6) ઉમેરતાં,

$$\iiint \frac{\partial V_x}{\partial x}\; dxdydz = \int V_x\,(\,x_2,y,z)d\sigma_x + \int V_x\,(x_1,y,z)d\sigma_x$$

નોધવા જેવું છેકે પ્રથમ પૃષ્ઠ સંકલન એ જમણા હાથ ના પ્રક્ષેપનો ભાગ છે તેજ રીતે બીજો એ ડાબા હાથનો ભાગ છે.

માટે સામાન્ય રીતે ,

$\iiint \frac{\partial V_x}{\partial x}\, dxdydz = \int V_x\, d\sigma_x$

તેવી જે રીતે

$\iiint \frac{\partial V_y}{\partial y}\, dxdydz = \int V_y\, d\sigma_y$

અને $\iiint \frac{\partial V_z}{\partial z}\, dxdydz = \int V_z\, d\sigma_z$

આ ત્રણેય ભાગને સાથે લેતાં,

$\int \nabla\, \cdot V\, d\tau = \int V_x\, d\sigma_x + \int V_y\; d\sigma_y + \int V_z\, d\sigma_z$ ----------(7)

અથવા $\int \nabla\, \cdot V\, d\tau = \int V\, d\sigma$ -----------(7)

જે આ પ્રમેયને સાબિત કરે છે.

ગ્રીનનો પ્રમેય (Green's Theorem) :

ગૉસના પ્રમેયને બે જુદા જુદા સ્વરૂપોમાં મુકી શકાય. ચાલો $V = u\,\nabla\, v$ લઇએ. જ્યાં u અને v સતત વિકલિત કરેલા સતત અદિશ વિધેયો છે.

પછી, $\nabla\, \cdot (u\,\nabla\, v) = \nabla u\; \cdot \nabla v + u\nabla^2 v$ ----------(1)

તેવી જ રીતે u અને v ના સ્થાન અદલાબદલી કરતાં,

$\nabla \cdot (v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v\nabla^2 u$ ---------(2)

હવે સમી.(1) કદ સાથે સંકલન કરતાં,

$\int \nabla \cdot (u \nabla v) d\tau = \int \left(\nabla u \cdot \nabla v + u\nabla^2 v\right) d\tau$

ડાબી બાજુનુ પદ એ ગૉસના પ્રમેયનું પૃષ્ઠ સંકલન દર્શાવે છે.

આપણે મેળવીએ,

$\int (u \nabla v) d\sigma = \int \left(\nabla u \cdot \nabla v + u\nabla^2 v\right) d\tau$ --------(3)

આજ રીતે ફરીથી સમી.(2)ની સાથે પ્રક્રિયા કરતાં,

$\int (v \nabla u) d\sigma = \int \left(\nabla v \cdot \nabla u + v\nabla^2 u\right) d\tau$ --------(4)

સમી.(3) અને સમી.(4) જે ગ્રીન પ્રથમ પ્રમેય કહે છે.

સમી.(2)અને સમી.(1) ની બાદબાકી કરતાં,

$\nabla \cdot (u \nabla v - v \nabla u) = u \nabla^2 v - v \nabla^2 u$

આ સમી.ને કદ સાથે સંકલન કરતા અને તે ડાબા હાથનો ભાગ ગૉસના પ્રમેયનું છે.

$\int (u \nabla v - v \nabla u) d\sigma = \int (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d\tau$ --------(5)

સમી.(5) એ ગ્રીનનો બીજો પ્રમેય કહે છે.

સ્ટોકનો પ્રમેય (Stoke's Theorem) :

સ્ટોકનો પ્રમેય એ પૃષ્ઠ સંકલન અને રેખા સંકલન વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે.

વિધાન : " કોઇ સદિશ ક્ષેત્ર $\vec{v}$ ના કર્લ(curl) નું કોઇ પૃષ્ઠ (σ) પરનું પૃષ્ઠ સંકલન તે સદિશના તે પૃષ્ઠની સીમા પર લીધેલા રેખા સંકલન જેટલું હોય છે."

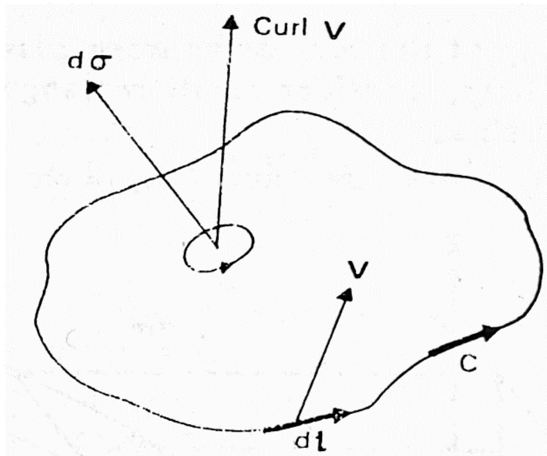
એટલે કે $\int \left(\nabla \times \vec{V}\right) d\sigma = \oint \vec{V} \cdot dl$ -----------(1)

જ્યાં dl એ જમણા હાથના સ્ક્રૂના પરિભ્રમણના અર્થમાં લેવામાં આવેલા પરિઘનું સદિશ તત્વ છે. જેની ટોચની સપાટી પર હકારાત્મક સામાન્ય દિશામાં આગળ વધે છે.

આમ, જો સંકલિત સદિશ V ના કર્લના રૂપમાં હોય તો, સપાટીની સપાટી સંપૂર્ણ સપાટીના પરિઘ પરના બિદુંઓ પર સદિશ V ના મૂલ્યો પર આધારિત છે, અંદરના બિંદુંઓ પર નહીં. આમ, સમાન પરિઘ ધરાવતા બધા પૃષ્ઠઓ એક સમાન મૂલ્ય આપશે.

સાબિતી : સદિશ ક્ષેત્ર V ને ધ્યાનમાં લો. અને તેમાં કોઇ પણ ખુલ્લી સપાટી દોરો. જે આપેલ બંધ વળાંક એ સપાટીની સીમા છે. સપાટીના આકારનો કોઇ અર્થ નથી.(આકૃતિ-1) સદિશ નું રેખા સંકલન દર્શાવવામાં આવેલી વિષમઘડીના અર્થમં જોવા મળે છે ત્યારે બંધ પાથની આસપાસ સદિશ V ને

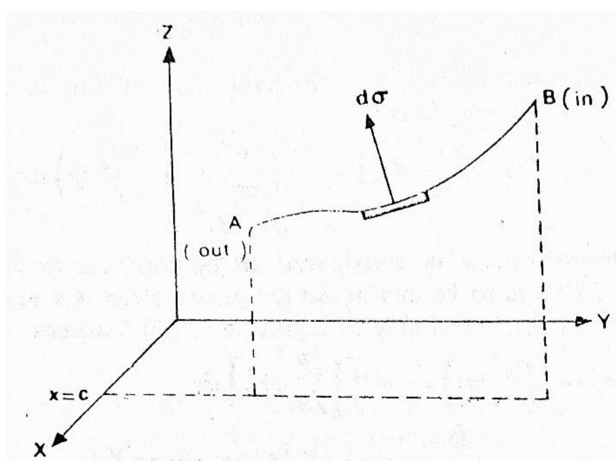
દર્શાવવામાં આવે છે. વિસ્તાર $\oint \vec{V} \cdot dl$ નું નાનું ભાગ (આકૃતિ-1) ધ્યાનમાં લો. સદિશક્ષેત્ર $d\sigma$ ને જમણા હાથના સ્ક્રૂ નિયમ દ્વારા આપવામાં આવે છે. સમી.(1)ની ડાબી બાજુના ભાગનું મૂલ્યાંકન કરવા માગીએ છીએ.સમી(1)નું વિસ્તરણ અને પુનઃ જૂથ કરતાં,



આકૃતિ-1

$$\int(\nabla \times V)d\sigma = \int\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}\ d\sigma_y - \frac{\partial V_x}{\partial y}\ d\sigma_z\right) + \int\left(\frac{\partial V_y}{\partial x}\ d\sigma_z - \frac{\partial V_y}{\partial z}\ d\sigma_x\right) + \int\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}\ d\sigma_x - \frac{\partial V_z}{\partial x}\ d\sigma_y\right) \quad \text{-----(2)}$$

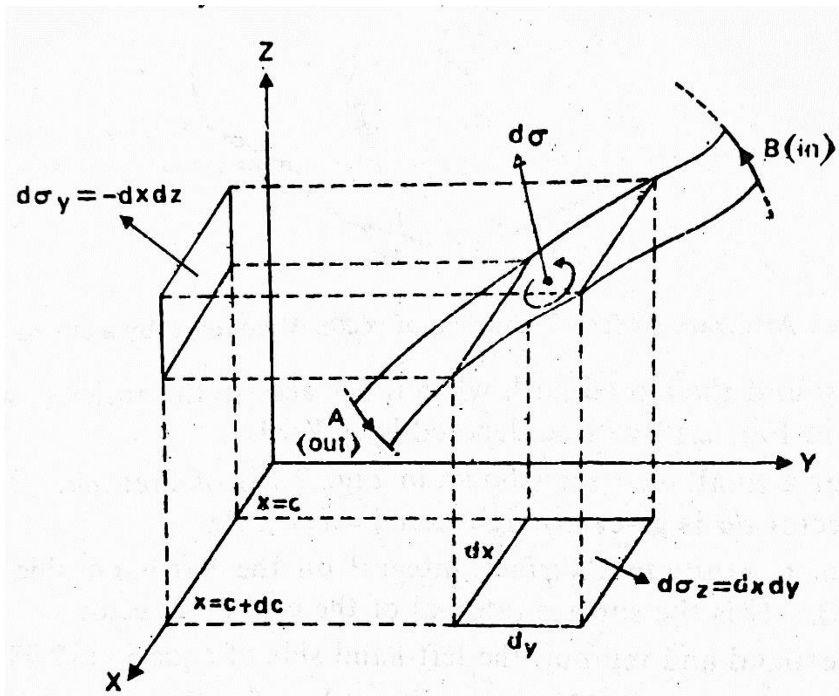
સમી. (2) નું જમણી બાજુનુ વિસ્તરણ કરતાં, ઉગમબિંદુંને એવી રીતે દિશા આપીએ કે જે સપાટી σ ને કેટલાક સમતલ x = c ને AB વળાંક છેદે છે. (આકૃતિ-2)



આકૃતિ-2

પરિમિત A બિંદુંએ બહાર નીકળશે અને B બિંદું પર અંદર જાય તેવુ દેખાશે. સામાન્ય પ્રણાલી પ્રમાણે એક નાના પ્રારંભિક ક્ષેત્રફળ $d\sigma$ એ સદિશ નો અર્થ રજૂ કરે છે. આ નાની પટ્ટી નો વિસ્તાર x= c થી c+dc સુધીના સમતલમાં છે. (આકૃતિ-3) આ પટ્ટી પર નાના લંબચોરસ વિસ્તાર $d\sigma$ અને જેવા ભાગઓ ને ધ્યાનમાં લો.

$$d\sigma_y = -dxdz \qquad and \quad d\sigma_z = dxdy$$



આકૃતિ-3

પટ્ટી સાંકડી પહોળાઇની હોય છે અને તેની સપાટી પસંદ કરવામાં આવે છે જે દરેક જગ્યાએ x = c માટે લંબરૂપે હોય છે.તેથી તે x ઘટક નથી AB ,x-નક્કી છે. આ પટ્ટી પર સંકલનની ક્રિયા પછી અમે x ને મંજૂરી આપીશું જેથી બંધ વળાંક સાથે ખેંચાયેલા સમગ્ર સપાટી વિસ્તારને બાઉન્ડ્રી તરીકે આવરી શકાય. સમી.(2)ની જમણી બાજુના પ્રથમ પદને ધ્યાનમાં લો. વિસ્તાર ઘટકો $d\sigma$ માટે તેનું સંકલન ભાગ છે.

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}\ d\sigma_y - \frac{\partial V_x}{\partial y}\ d\sigma_z\right) = -\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}\ dz + \frac{\partial V_x}{\partial y}\ dy\right) dx = -dV_x\, dx$$

આ સંક્લનમાં x ને સ્થિર (x = c) ગણવામાં આવે છે. તેથી ઉપરોક્ત સંકલનનુ સમગ્ર પટ્ટી AB માટે dV_x મૂલ્યાંકન કરવાનુ છે અને તેથી સમી(2) ની જમણી બાજુનું પ્રથમ પદ નાચે પ્રમાણે બને છે.

$$\int \left(\frac{\partial V_x}{\partial z}\, d\sigma_y - \frac{\partial V_x}{\partial y}\, d\sigma_z \right)$$
$$= -\int \left[\int_A^B dV_x \right] dx = -\int \left[V_x(x, y_B, z_B) - V_x(x, y_A, z_A) \right] dx$$

જ્યાં (x, y_B, z_B) અને (x, y_A, z_A) એ બિંદું B થી A ના સંકલનના ભાગ છે. આ સંકલન પટ્ટીનું ક્ષેત્ર બિંદું A થી B સુધી છે. આપણે અક્ષ x ને ફિક્સ કરેલ છે અને ફક્ત y અને z અક્ષો સાથે વિસ્તારના ઘટકો નુ સંકલન લઇએ છીએ. બિંદું A પર પરિઘની પટ્ટીની લંબાઇ dx= dl_x છે અને તે B, dx=-dl_x પર છે. તેથી આપણે લખી શકીયે કે

$\int \left(\frac{\partial V_x}{\partial z}\, d\sigma_y - \frac{\partial V_x}{\partial}\, d\sigma_z \right) = \int V_x(x, y_B, z_B) dl_x + V_x(x, y_A\ , z_A) dl_x = \oint V_x\, dl_x$ ---------(3)

હવે છેલ્લું પગલું એવું વિચારાય કે પરિઘ માટે x માં ફેરફારને સમગ્ર સપાટીને ઢંકાય જાય.

આજ રીતે સમી.(2) ની જમણી બાજુના બીજા અને ત્રીજા પદ માટે $\oint V_y\, dl_y$ અને $\oint V_z\, dl_z$લખી શકાય. આ બધા પદોનો સરવાળો કરતાં,

$\int (\nabla \times V) \cdot d\sigma = \oint \left[V_x\, dl_x + V_y\, dl_y + V_z\, dl_z \right]$

અને $\int (\nabla \times V) \cdot d\sigma = \oint V \cdot dl$ ------------(4)

આને સ્ટૉકનો પ્રમેય કહે છે.

ગૉસના પ્રમેયની વાત કરીએ તો તેમાં પૃષ્ઠ સંકલન અને રેખા સંકલન નો સંબંધ મેળવીએ છીએ. આ રીતે કહી શકાય કે

$\int d\sigma \times \nabla \emptyset = \oint \emptyset\, dl$ ---------(5)

અને $\int (d\sigma \times \nabla) \times p = \oint dl \times p$ ---------(6)

જ્યાં V =c× p જેમાં c એ સતત સદિશ છે.

સદિશના કર્લનું ભૌમિતિક મહત્વ (Physical Significance of The Curl of Vector) :

સ્ટૉકના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને સદિશના કર્લને નીચે પ્રમાણે સમજાવી શકાય. ક્ષેત્ર $d\sigma = \hat{n} d\sigma$ ને ધ્યાનમાં લો.આ ક્ષેત્ર $d\sigma$ નો ઉપયોગ કરી સ્ટૉકના પ્રમેયમાં સદિશ V માટે રેખા સંકલન લેતાં,

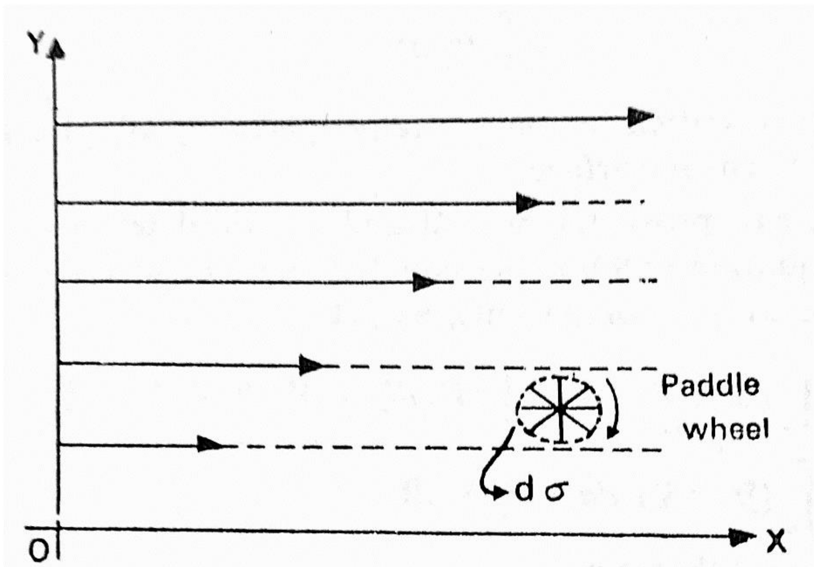
$\oint V \cdot dl = (\nabla \times V) \cdot d\sigma$

અથવા $\oint V \cdot dl = (\nabla \times V) \cdot \hat{n} d\sigma$

તેથી યુનિટ સદિશ $\hat{n}$ ની દિશા સાથે સદિશ V ના કર્લનો ઘટક છે.

$$(\nabla \times V) \cdot \hat{n} = \lim_{d\sigma \to 0} \frac{1}{d\sigma} \oint V \cdot dl$$

સમતલ બંધ સપાટીની આસપાસ રેખા સંકલન $\oint V \cdot dl$ ને પણ સપાટીના વિસ્તાર દ્વારા સદિશ V ના સરક્યુલેશન તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. હવે સદિશ ક્ષેત્ર V=ρv પર ધ્યાન આપો. જ્યાં ρ પ્રવાહીની ઘનતા અને v તેનો વેગ છે. ક્ષેત્ર $d\sigma$ ના xy -સમતલ ને ધ્યાનમાં લો. તેની ધરી સમાંતર z-અક્ષ સાથે પેડલ વ્હીલની કલ્પના કરો. આ પેડલ વ્હીલ ફરશે ત્યારે સદિશ V દરેક બિદું આગળ અચળ નહી હોય.જો સદિશ અચળ હોય તો દિશા અને મૂલ્ય ગમે ત્યાં હશે અને પેડલ વ્હીલ ફરતું નહી હોય.બીજા શબ્દોમાં કે સંકલન અને સદિશ V નુ સરક્યુલેશન $d\sigma$ એ શૂન્ય બનશે.



આમ, સરક્યુલેશન જે ક્ષેત્ર $d\sigma \to 0$ તરીકે કર્લનો ઘટક પણ છે.તે સદિશ ક્ષેત્રની પ્રકૃતિ પર આધારીત છે.અને સદિશ ક્ષેત્રના સંદર્ભમાં આ વિસ્તારની દિશાને અભિગમ આપે છે. પ્રવાહીના વહેણના ભાગનું ચિત્ર, જ્યારે સદિશ સાથે સાથે અથવા x થી y દિશા હોય ત્યારે સરક્યુલેશનનું મહત્વ હોય છે. જ્યારે $d\sigma$ =k $d\sigma$ થાય છે અને શૂન્ય હોય છે.

Examples (દાખલાઓ):

1. **જો $\vec{A} = (2, -3, 3), \vec{B} = (1, 2, -1)$ અને $\vec{C}$=(-4,2,1) હોય તો $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ શોધો.**

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

=2(2+2) +3(1-4) +3(2+8)

=8-9+30=29

2. જો $\vec{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{2}, -\boldsymbol{3}, \boldsymbol{1}), \vec{\boldsymbol{B}} = (\boldsymbol{3}, -\boldsymbol{2}, \boldsymbol{3})$ અને $\vec{\boldsymbol{C}}$=(4, -4,3) હોય તો $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot (\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{C}})$ શોધો.

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \end{vmatrix}$$

=2(-6+12) +3(9-12) +1(-12+8) =12-9-4=-1

3.સાબિત કરો કે $\vec{\boldsymbol{A}} \times (\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{C}}) + \vec{\boldsymbol{B}} \times (\vec{\boldsymbol{C}} \times \vec{\boldsymbol{A}}) = \vec{\boldsymbol{C}} \times (\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}) = \boldsymbol{0}$

$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ માં $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ કૌંસમાં છે. તેથી $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ નું રેખીય સંયોજન લો.

$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = a\vec{B} + b\vec{C}$

$\vec{B}$ અને $\vec{C}$ ના સહગુણક બાકીના બે સદિશોના ડૉટ ગુણાકાર છે.

$a = \vec{A} \cdot \vec{C}$ અને $b = \vec{A} \cdot \vec{B}$

તેથી આ બંનેનો સરવાળો કરતાં,

$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) + \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

$\vec{B}$ વચ્ચે હોવાથી તે ધન રહે છે.

$\therefore \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ ---------(1)

તે જ પ્રમાણે $\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})$ -----(2)

અને $\vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C}) - \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C})$ --------(3)

આ ત્રણે સમી. નો સરવાળો કરતાં,

$$\vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) + \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C}) + \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C}) - \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) = 0$$

તેથી સાબિત થાય છે.

4.સાબિત કરોકે $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}+(\vec{B}\times\vec{C})\times\vec{A}+(\vec{C}\times\vec{A})\times\vec{B}=0$

ઉપરના દાખલા નંબર 3 પ્રમાણેનો નિયમ વાપરતાં,

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C})$$
$$(\vec{B}\times\vec{C})\times\vec{A}=\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})-\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})$$
$$(\vec{C}\times\vec{A})\times\vec{B}=\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

આ ત્રણેનો સરવાળો કરતાં

$$\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C})+\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})-\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})+\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})=0$$

જે સાબિત થાય છે.

5. ચાર સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર સમજાવો. અથવા સાબિત કરો કે

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})=\begin{vmatrix}\vec{A}\cdot\vec{C} & \vec{B}\cdot\vec{C}\\ \vec{A}\cdot\vec{D} & \vec{B}\cdot\vec{D}\end{vmatrix}$$

ત્રણ સદિશોનો અદિશો ગુણાકારનો ચક્રિય ગુણધર્મ વાપરતાં

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$ થાય.

[નોંધ : $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{B})\times\vec{C}$ ના લખી શકાય કારણ કે અદિશ રાશિનો સદિશ રાશિ સાથેનો ક્રોસ ગુણાકાર કરી શકાય નહીં]

ડા.બા. $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})=\vec{P}\cdot(\vec{C}\times\vec{D})$ ($\because \vec{A}\times\vec{B}=\vec{P}$ ધારો)

$=(\vec{P}\times\vec{C})\cdot\vec{D}$ (ડૉટ અને ક્રોસના સ્થાનની અદલાબદલી કરી છે.)

$=\vec{D}\cdot(\vec{P}\times\vec{C})$ (ડૉટ ગુણાકાર ક્રમનો નિયમ અનુસરે છે.)

$$=\vec{D}\cdot[(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}]$$
$$=\vec{D}\cdot[\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C})]$$
$$=(\vec{D}\cdot\vec{B})(\vec{A}\cdot\vec{C})-(\vec{D}\cdot\vec{A})(\vec{B}\cdot\vec{C})$$
$$=(\vec{B}\cdot\vec{D})(\vec{A}\cdot\vec{C})-(\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{A}\cdot\vec{C} & \vec{A}\cdot\vec{D} \\ \vec{B}\cdot\vec{C} & \vec{B}\cdot\vec{D} \end{vmatrix}$$

[નોંધ: આ દાખલામાં $\vec{C}\times\vec{D}=\vec{P}$ મૂકીને પણ ગણી શકાય].

6. ચાર સદિશોનો સદિશ ગુણાકાર સમજાવો. અથવા સાબિત કરો કે

$$\left(\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{B}}\right)\times\left(\vec{\boldsymbol{C}}\times\vec{\boldsymbol{D}}\right)=\left\{\left(\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{B}}\right)\cdot\vec{\boldsymbol{D}}\right\}\cdot\vec{\boldsymbol{C}}-\left\{\left(\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{B}}\right)\cdot\vec{\boldsymbol{C}}\right\}\cdot\vec{\boldsymbol{D}}$$

પ્રથમ રીત : ધારો કે $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{P}$ તેથી આપેલ દાખલામાં ડા.બા.

$$\vec{P}\times\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)=\vec{C}\left(\vec{P}\cdot\vec{D}\right)-\vec{D}\left(\vec{P}\cdot\vec{C}\right)$$

$$=\vec{C}\left\{\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{D}\right\}-\vec{D}\left\{\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}\right\}$$

$$=\left\{\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{D}\right\}\vec{C}-\left\{\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}\right\}\vec{D}$$

જે સાબિત થાય છે.

બીજી રીત : હવે ધારો કે $\vec{C}\times\vec{D}=\vec{Q}$ લઇએ તો ડા.બા.

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)=\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{Q}$$

$$=\vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{Q}\right)-\vec{A}\left(\vec{B}\cdot\vec{Q}\right)$$

$$=\vec{B}\left\{\vec{A}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)\right\}-\vec{A}\left\{\vec{B}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)\right\}$$

$$=\left\{\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)\cdot\vec{A}\right\}\vec{B}-\left\{\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)\cdot\vec{B}\right\}\vec{A}$$

(બંને રીતે પૂછી શકાય. જે રીતે જવાબ માંગ્યો હોય તેમ કરી શકાય)

7. દર્શાવો કે આપેલા સદિશ અને તેના વ્યુત્ક્રમ સદિશનો અદિશ ગુણાકાર એક હોય છે.

ધારો કે ત્રણ સદિશ $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ છે. તેને અનુરૂપ તેના વ્યુત્ક્રમ સદિશો $\overrightarrow{A'}$, $\overrightarrow{B'}$, $\overrightarrow{C'}$ છે.

આ બંને વચ્ચેના સંબંધો નીચે પ્રમાણે છે.

$$\overrightarrow{A'}=\frac{\vec{B}\times\vec{C}}{\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)}\ ,\qquad \overrightarrow{B'}=\frac{\vec{C}\times\vec{A}}{\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)}\ ,\qquad \overrightarrow{C'}=\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)}$$

(આ સંબંધ યાદ રાખવા જરૂરી છે)

$\vec{A}\cdot\overrightarrow{A'} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}}{\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})}$ (છેદમાં $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ $=(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$ પણ લઇ શકાય)

$$\therefore\ \vec{A}\cdot\overrightarrow{A'} = 1$$

તેજ પ્રમાણે $\vec{B}\cdot\overrightarrow{B'} = \frac{\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})}{\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})}$

પરંતુ $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$

$\vec{B}\cdot\overrightarrow{B'} = \frac{\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})}{\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})}$ =1

અને છેલ્લે $\vec{C}\cdot\overrightarrow{C'} = \frac{\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})}{\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})}$

પરંતુ અહીં પણ $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$

$\vec{C}\cdot\overrightarrow{C'} = \frac{\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})}{\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})}$ =1

આમ, કોઇપણ સદિશ અને તેના વ્યુત્ક્રમ સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર એક થાય છે.

8. જો $\vec{\boldsymbol{a}} = (-\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}), \vec{\boldsymbol{b}} = (\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{1})$ અને $\vec{\boldsymbol{c}}$=(1,1,-1) હોય તો તેમના વ્યસ્ત સદિશો શોધો.

સદિશો $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ના વ્યસ્ત સદિશોને $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ વડે દર્શાવતાં,

$\vec{A} = \frac{\vec{b}\times\vec{c}}{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}$, $\vec{B} = \frac{\vec{c}\times\vec{a}}{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}$ અને $\vec{C} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}$

$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ =-1(1-1)-1(-1-1)+1(1+1)=2+2=4

હવે $\vec{b}\times\vec{c} = (i-j+k)\times(i+j-k) = k+j+k+i+j-i = 2j+2k$

$$\therefore A = \frac{2j+2k}{4} = \frac{j}{2}+\frac{k}{2}$$

આથી A ના સદિશો (0, 1/2, 1/2)

આજ પ્રમાણે B=(1/2, 0, 1/2) , C=(1/2, 1/2, 0)

9. સમાંતર ફલકની પાસપાસેની ત્રણ બાજુઓના સદિશો નીચે પ્રમાણે છે. તેનું ઘનફળ શોધો.

$\vec{a} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ અને $\vec{c} = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$

ઘનફળ=$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

પ્રથમ $\vec{b} \times \vec{c} = (\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}) X (3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k})$

$= -\hat{k} - 2\hat{\jmath} - 6\hat{k} + 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - \hat{\imath}$

$= 3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - 7\hat{k}$

હવે કદ= $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}).(3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - 7\hat{k})$

=6+15-28

કદ=-7

10. સદિશ $\vec{A} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$ તથા $\vec{C} = \hat{\imath} - \widehat{3\jmath} - 2\hat{k}$

હોય તો $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$ શોધો.(પ્રકટીસ માટે)

(ઉપરના દાખલા-9 પ્રમાણે $\vec{A} \times \vec{B}$ શોધો અને જે સદિશ આવે તેનો $\vec{C}$ સાથે અદિશ ગુણાકાર કરવો)

11. સમાંતર ઘનનું એક શિરોબિંદું યામ પધ્ધતિના ઉગમબિંદું પર છે. ત્રણ પાસપાસેના બિંદુઓ (10,-5,3),(3,-4,7) અને (-5,-6,3) બિંદુઓ છે. તો તેનું કદ ગણો.

$$\text{કદ} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 10 & -5 & 3 \\ 3 & -4 & 7 \\ -5 & -6 & 3 \end{vmatrix}$$

=10(-12+42)+5(9+35)+3(-18-20)

=300+220-114=406

12.જો $\vec{A} = \widehat{2\imath} - 6\hat{\jmath} - 3\hat{k}$ અને $\vec{B} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$ હોય તો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ માંથી પસાર થતાં સમતલને લંબ એવા એકમ સદિશનું મૂલ્ય શોધો.

ધારો કે $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ છે. જ્યાં $\vec{C}$ સદિશ $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ માંથી પસાર થતાં સમતલને લંબ છે.

હવે $\vec{C} = \overrightarrow{C_n}$ જ્યાં $\vec{n}$ એકમ સદિશ છે.

$\therefore\ \vec{n} = \frac{\vec{C}}{C} = \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{C}$

$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} = (\widehat{2\imath} - 6\hat{\jmath} - 3\hat{k})X(4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k})$

$= 6\hat{k} + 2\hat{\jmath} + 24\hat{k} + 6\hat{\imath} - 12\hat{\jmath} + 9\hat{\imath}$

$\vec{C} = 15\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} + 30\hat{k}$

$=C\cdot\vec{n}$

$C=\sqrt{15^2 + 10^2 + 30^2}$ =35

$\therefore$ એકમ સદિશ $\vec{n} = \frac{\vec{C}}{C} = \frac{15\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} + 30\hat{k}}{35}$

$\vec{n} = \frac{3}{7}\hat{\imath} - \frac{2}{7}\hat{\jmath} + \frac{6}{7}\hat{k}$

13.જો $\vec{A} = \widehat{2\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ અને $\vec{B} = 6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ હોય તો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ વચ્ચેનો કોણ શોધો.

$\vec{A} \cdot \vec{B} = ABcos\ \theta$

$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

$A = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}$ =3

B=$\sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2}$ = 7

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

=(2)(16)+(2)(-3)+(-1)(2)=4

$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$

4=(3)(7) $\cos\theta$

$\cos\theta$ =4/28=0.1905

θ =79

14. $\emptyset = \boldsymbol{xy^2z^3}$ **વડે અપાતા એક અદિશ ક્ષેત્ર માટે (1,2,-2) બિંદુંએ ગ્રેડીયન્ટ્નું મૂલ્ય અને દિશા શોધો.**

$\emptyset = xy^2z^3$

$\nabla\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\hat{k}$

$\frac{\partial\emptyset}{\partial x} = y^2z^3$, $\frac{\partial\emptyset}{\partial y} = 2xyz^3$, $\frac{\partial\emptyset}{\partial z} = 3xy^2z^2$

$\therefore \quad \nabla\emptyset = y^2z^3\hat{\imath} + 2xyz^3\hat{\jmath} + 3xy^2z^2\hat{k}$

x=1, y=2, z=-2

$\nabla\emptyset = (2)^2(-2)^3\hat{\imath} + 2(1)(2)(-2)^3\hat{\jmath} + 3(1)(2)^2(-2)^2\hat{k}$

$\nabla\emptyset = -32\hat{\imath} - 32\hat{\jmath} + 48\hat{k}$

$|\nabla\emptyset| = \sqrt{(-32)^2 + (-32)^2 + (48)^2}$

$= 16\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (3)^2}$

$|\nabla\emptyset| = 16\sqrt{4+4+9}$ $=16\sqrt{17}$

આમ, આપેલ અદિશ ક્ષેત્ર માટે બિદું (1,2,-2) પાસે ફેરફારના દરનું મહતમ મૂલ્ય $16\sqrt{17}$ છે.અને

તે $\frac{1}{16\sqrt{17}}(-32, -32{,}48)$ એકમ સદિશની દિશામાં છે.

15. $\vec{F} = (x + 2y)\hat{\imath} + (2y - z)\hat{\jmath} + (x + 2z)\hat{k}$ **હોય તો div** $\vec{F}$ **શોધો.**

$F_x = x + 2y \qquad \frac{\partial F_x}{\partial x} = 1$

$F_y = 2y - z \qquad \frac{\partial F_y}{\partial y} = 2$

$F_z = x + 2z \qquad \frac{\partial F_z}{\partial z} = 2$

પરતુ div $\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 1+2+2=5$

16. $\vec{A} = (x + y)\hat{\imath} + (y - x)\hat{\jmath} - 2z\hat{k}$ **માટે કર્લ તથા ડાયવર્જન્સ શોધો.**

$A_x = x+y$, $A_y = y-x$, $A_z = -2z$

$$curl\ \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = 1 \ , \ \frac{\partial A_x}{\partial z} = 0 \ , \ \frac{\partial A_y}{\partial x} = -1 \ , \ \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \ , \ \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \ , \ \frac{\partial A_z}{\partial y} = 0$$

આ કિંમતો ઉપરના સમી.માં મૂકતાં

$$curl\ \vec{A} = (0-0)\hat{\imath} + (0-0)\hat{\jmath} + (-1-1)\hat{k}$$

$$curl\ \vec{A} = -2\hat{k}$$

હવે $div\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = 1 \quad , \quad \frac{\partial A_y}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial A_z}{\partial z} = -2$$

$$div\,\vec{A} = 1 + 1 - 2 = 0$$

17. $\vec{A} = 5y\hat{\imath} + 6x\hat{\jmath} + 2z\hat{k}$ વડે અપાતા સદિશ ક્ષેત્રનું કર્લ શોધો.

સદિશ $\vec{A} = A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath} + A_z\,\hat{k}$ સાથે સરખાવતાં

$A_x = 5y \quad , A_y = 6x \quad , \quad A_z = 2z$

હવે $curl\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}$

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = 5 \quad , \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = 0 \quad , \frac{\partial A_y}{\partial x} = 6 \quad , \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \ , \quad \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \ , \frac{\partial A_z}{\partial y} = 0$$

$curl\,\vec{A} = (0-0)\hat{\imath} + (0-0)\hat{\jmath} + (6-5)\hat{k}$

$curl\,\vec{A} = \hat{k}$

18. જો સદિશ ક્ષેત્ર $\vec{A} = 2xz^2\hat{\imath} - yz\hat{\jmath} + 3xz^3\hat{k}$ હોય તો બિંદુ (1,1,1) આગળ $curl\,\vec{A}$ નું મૂલ્ય $\widehat{(\imath} + \hat{\jmath})$ સાબિત કરો.

$A_x = 2xz^2 \ , \qquad A_y = yz \quad , \quad A_z = 3xz^3$

$$curl\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = 4xz \quad , \frac{\partial A_y}{\partial x} = 0 \quad , \frac{\partial A_y}{\partial z} = -y \ , \quad \frac{\partial A_z}{\partial x} = 3z^3 \ , \frac{\partial A_z}{\partial y} = 0$$

$curl\,\vec{A} = (0+y)\hat{\imath} + (4xz - 3z^3)\hat{\jmath} + (0-0)\hat{k}$

હવે x=y=z=1 મૂકતાં

=$\hat{\imath} + (4-3)\hat{\jmath} = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$ સાબિત થાય.

19. સોનાના સ્ફટિકના સમઘનના સદિશો $\vec{a} = \frac{a}{2}\hat{i} + \frac{a}{2}\hat{j}$, $\vec{b} = \frac{a}{2}\hat{j} + \frac{a}{2}\hat{k}$, $\vec{c} = \frac{a}{2}\hat{k} + \frac{a}{2}\hat{i}$ છે. તો સમાંતર ઘનનું કદ શોધો.

$$\vec{V} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$= \begin{vmatrix} a'x & a'y & a'z \\ b'x & b'y & b'z \\ c'x & c'y & c'z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a/2 & a/2 & 0 \\ 0 & a/2 & a/2 \\ a/2 & 0 & a/2 \end{vmatrix} = \frac{a^3}{8} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{a^3}{8} [1(1+0)+1(0+1)+0(0+1)] = \frac{a^3}{4}$$

20. સાબિત કરો કે $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

21. જો $\emptyset(x, y, z) = 3x^2y - y^3z^2$ હોય તો (1,-2,-1) બિંદુ આગળ $\nabla\emptyset$ શોધો.

$$\nabla\emptyset = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\,\hat{k}\right)(3x^2y - y^3z^2)$$

$$= \hat{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y - y^3z^2) + \hat{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y - y^3z^2) + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}(3x^2y - y^3z^2)$$

$$= 6xy\hat{\imath} + (3x^2 - 2y^2z^2)\hat{\jmath} - 2y^3z\hat{k}$$

$$= 6(1)(-2)\,\hat{\imath} + [3(1)^2 - 2(-2)^2(-1)^2]\,\hat{\jmath} - 2(-2)^3(-1)\,\hat{k}$$

$$= -12\,\hat{\imath} - 9\,\hat{\jmath} - 16\,\hat{k}$$

22. સાબિત કરો કે (a) $\nabla \cdot (A + B) = \nabla \cdot A + \nabla \cdot B$ (b) $\nabla \cdot (\emptyset A) = (\nabla\emptyset) \cdot A + \emptyset(\nabla \cdot A)$

(a) $A = A_1\hat{\imath} + A_2\hat{\jmath} + A_3\hat{k}$, $B = B_1\hat{\imath} + B_2\hat{\jmath} + B_3\hat{k}$

$\nabla \cdot (A + B) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)[(A_1 + B_1)\hat{\imath} + (A_2 + B_2)\hat{\jmath} + (A_3 + A_3)\hat{k}$

$= \frac{\partial}{\partial x}(A_1 + B_1) + \frac{\partial}{\partial y}(A_2 + B_2) + \frac{\partial}{\partial z}(A_3 + B_3)$

$= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} + \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z}$

$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\left(A_1\hat{\imath} + A_2\hat{\jmath} + A_3\hat{k}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)(B_1\hat{\imath} + B_2\hat{\jmath} + B_3\hat{k})$

$\therefore\ \nabla \cdot (A + B) = \nabla \cdot A + \nabla \cdot B$

(b) $\nabla \cdot (\emptyset A) = \nabla \cdot \left(\emptyset A_1\hat{\imath} + \emptyset A_2\hat{\jmath} + \emptyset A_3\hat{k}\right)$

$= \frac{\partial}{\partial x}(\emptyset A_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\emptyset A_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\emptyset A_3)$

$$= \left(\frac{\partial \emptyset}{\partial x}A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x}\emptyset\right) + \left(\frac{\partial \emptyset}{\partial y}A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial y}\emptyset\right) + \left(\frac{\partial \emptyset}{\partial z}A_3 + \frac{\partial A_3}{\partial z}\emptyset\right)$$

$$= \frac{\partial \emptyset}{\partial x}A_1 + \frac{\partial \emptyset}{\partial y}A_2 + \frac{\partial \emptyset}{\partial z}A_3 + \emptyset\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial \emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial \emptyset}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial \emptyset}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(A_1\hat{\imath} + A_2\hat{\jmath} + A_3\hat{k}\right) + \emptyset\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(A_1\hat{\imath} + A_2\hat{\jmath} + A_3\hat{k}\right)$$

$\therefore\ \nabla \cdot (\emptyset A) = (\nabla\emptyset)\cdot A + \emptyset(\nabla \cdot A)$

23. જો $\boldsymbol{A = xz^3\hat{\imath} - 2x^2yz\hat{\jmath} + 2yz^4\hat{k}}$ હોય તો (1,-1,1) બિંદુ આગળ $\boldsymbol{\nabla \times A}$ શોધો.

$$\nabla \times A = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \times \left(xz^3\hat{\imath} - 2x^2yz\hat{\jmath} + 2yz^4\hat{k}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^3 & -2x^2yz & 2yz^4 \end{vmatrix}$$

$= \left[\frac{\partial}{\partial y}\ (2yz^{4}) - \frac{\partial}{\partial z}\ (-2x^2yz)\ \hat{\imath}\right] + \left[\frac{\partial}{\partial z}\ (xz^3) - \frac{\partial}{\partial x}\ (2yz^4)\hat{\jmath}\right] + \left[\frac{\partial}{\partial x}\ (-2x^2yz) - \frac{\partial}{\partial y}\ (xz^3)\hat{k}\right]$

$\therefore\ \nabla \times A = (2z^4 + 2x^2y)\hat{\imath} + 3xz^2\hat{\jmath} - 4xyz\hat{k}$

$= 3\ \hat{\jmath}\ +\ 4\ \hat{k}$

24. સાબિત કરો કે $\nabla \times (\emptyset A) = \emptyset(\nabla \times A) + (\emptyset\ \nabla) \times A$

$\nabla \times (\emptyset\ A) =\ \nabla\ \times\ \left(\emptyset\ A_1\hat{\imath} + \emptyset\ A_2\hat{\jmath} + \emptyset\ A_3\ \hat{k}\right)$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \emptyset A_1 & \emptyset A_2 & \emptyset A_3 \end{vmatrix}$$

$= \left[\frac{\partial}{\partial y}\ (\emptyset A_3) - \frac{\partial}{\partial z}\ (\emptyset A_2)\right]\hat{\imath} + \left[\frac{\partial}{\partial z}\ (\emptyset A_1) - \frac{\partial}{\partial x}\ (\emptyset A_3)\right]\hat{\jmath} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\ (\emptyset A_2) - \frac{\partial}{\partial y}\ (\emptyset A_1)\right]\hat{k}$

$= \left[\emptyset\ \frac{\partial A_3}{\partial y} + \frac{\partial \emptyset}{\partial y}\ A_3 - \emptyset\ \frac{\partial A_2}{\partial z} + \ \frac{\partial \emptyset}{\partial z}\ A_2\ \right]\hat{\imath} + \left[\emptyset\ \frac{\partial A_1}{\partial z} + \ \frac{\partial \emptyset}{\partial z}\ A_1 - \emptyset\ \frac{\partial A_3}{\partial x}\ + \ \frac{\partial \emptyset}{\partial x}\ \ A_3\right]\hat{\jmath} + \left[\emptyset\ \frac{\partial A_2}{\partial x} + \ \frac{\partial \emptyset}{\partial x}\ A_2 - \emptyset\ \frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial \emptyset}{\partial y}\ A_1\right]\hat{k}$

$= \emptyset\ \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\hat{k}\ \right] + \emptyset\ \left[\left(\frac{\partial \emptyset}{\partial y}\ A_3 - \frac{\partial \emptyset}{\partial z}\ A_2\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial \emptyset}{\partial z}\ A_1 - \frac{\partial \emptyset}{\partial x}\ A_3\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial \emptyset}{\partial x}\ A_2 - \frac{\partial \emptyset}{\partial y}\ A_1\right)\hat{k}\right]$

$$= \emptyset\ (\nabla\ \times A\ ) + \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial \emptyset}{\partial x} & \frac{\partial \emptyset}{\partial y} & \frac{\partial \emptyset}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$\therefore\ \nabla \times (\emptyset A) = \emptyset(\nabla \times A) + (\emptyset\ \nabla) \times A$

25. સાબિત કરો કે $\nabla\ \times\ (\nabla\ \emptyset) = 0 \quad or \quad curl\ grad\ \emptyset = 0$

$\nabla\ \times\ (\nabla\ \emptyset\ ) = \nabla\ \times\ \left(\frac{\partial \emptyset}{\partial x}\ \hat{\imath} + \frac{\partial \emptyset}{\partial y}\ \ \hat{\jmath} + \ \frac{\partial \emptyset}{\partial z}\ \hat{k}\right)$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \emptyset}{\partial x} & \frac{\partial \emptyset}{\partial y} & \frac{\partial \emptyset}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \emptyset}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \emptyset}{\partial y}\right)\right]\hat{\imath} + \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \emptyset}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \emptyset}{\partial z}\right)\right]\hat{\jmath} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \emptyset}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \emptyset}{\partial x}\right)\right]\hat{k}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial z \partial y}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x \partial z}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^{\partial} \emptyset}{\partial y \partial x}\right)\hat{k}$$

$$\therefore \nabla \times (\nabla \emptyset) = 0 \quad or \quad curl\ grad\ \emptyset = 0$$

26. સાબિત કરો કે $\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0 \quad or \quad Curl = 0$

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) = \nabla \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \nabla \cdot \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\hat{k}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z \partial y} = 0$$

27. સાબિત કરો કે $\nabla \times (\nabla \times A) = -\nabla^2 A + \nabla(\nabla \cdot A)$

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla \times \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \nabla \times \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\hat{k}\right]$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} & \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} & \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\right]\hat{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) - \right.$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\right]\hat{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\right]\hat{k}$$

$$= \left(-\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}\right)\hat{i} + \left(-\frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2}\right)\hat{j} + \left(-\frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2}\right)\hat{k} +$$

$$\left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial z \partial x}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial^2 A_3}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y}\right)\hat{j} + \left(-\frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial y \partial z}\right)\hat{k}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} - \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2}\right)\hat{k}$$

$$= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}\right) + \hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \right.$$

$$\left. \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) + \hat{j}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$= \nabla^2 A + \nabla\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$\therefore\ \nabla \times (\nabla \times A) = -\nabla^2 A + \nabla(\nabla \cdot A)$$

પ્રશ્ન બેંક

1.	અદિશ વિધેયના ગ્રેડિયંટ્ની સમજ આપી તેનું ભૌમિતિક અર્થઘટન તારવો. **અથવા**
	ઓપરેટર એટલે શું ? અદિશ વિધેયના ગ્રેડિયંટ્નું ભૌમિતિક અર્થઘટન સમજાવો.
2.	સ્ટોકનો પ્રમેય લખો અને સમજાવો.
3..	ગોસ ડાયવર્જેંસનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

4..	ત્રણ સદિશોના અદિશ ગુણાકારમાં ચક્રીય ગુણધર્મ સમજાવો.
5.	કાર્ટેઝિયન યામ પધ્ધતિમાં ત્રિસદિશ ગુણાકારનું સ્વરુપ મેળવો.
6.	ત્રણ સદિશોના સદિશ ગુણાકાર સમજાવી $\vec{A}$ X ($\vec{B} \times \vec{C}$) = ($\vec{A} . \vec{C}$) $\vec{B}$ - ($\vec{A} . \vec{B}$) $\vec{C}$ સંબંધ મેળવો.
7.	કાર્ટેઝિયન યામ પધ્ધતિમાં સ્થાન સદિશનુ સમય સાપેક્ષ વિકલન સમજાવી વેગ-પ્રવેગનાં સૂત્રો તારવો અને અદિશ સદિશ ક્ષેત્રો વર્ણવો. **અથવા** કાર્તેઝીય યામ પધ્ધતિમાં સ્થાન સદિશ $\vec{r}$ નું સમય સાપેક્ષે વિકલન સમજાવી વેગ-પ્રવેગના સૂત્રો મેળવો.
8.	ગ્રીનનો પ્રમેય ડાયવર્જેન્સ પ્રમેય પરથી તારવો. **અથવા** ડાયવર્જેન્સ પ્રમેય પરથી ગ્રીન નું પ્રમેય તારવો. **અથવા** ગોસના પ્રમેય પરથી ગ્રીન નું પ્રમેય તારવો
9.	$\vec{F}$ = (3x+4y) $\hat{\imath}$ + (6y-z) $\hat{\jmath}$ +(x-z) $\hat{k}$ માટે div $\vec{F}$ ગણો. **અથવા** $\vec{F} = (x+2y)\hat{\imath} + (2y-z)\hat{\jmath} + (x+2z)\hat{k}$માટે $div\,\vec{F}$ ગણો.
10.	સાબિત કરો કે $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$.
11.	સાબિત કરો કે $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$.
12.	અદિશ વિધેય $\emptyset = 3x^2y - y^3z^2$ માટે બિંદુ $(1, -2, 1)$ પાસે $\nabla\emptyset$ અને તેનું મૂલ્ય શોધો.
13.	પારસ્પરિક સદિશો વિશે નોંધ લખો.
14.	આભાસી સદિશો અને આભાસી અદિશો વિશે નોંધ લખો.
15.	સદિશોનું સંકલન સમજાવો.
16.	સાતત્યનું સમીકરણ મેળવો.
17.	દ્વિ-પારિમાણિક ધ્રુવીય યામ પધ્ધતિ (r, θ) માં સદિશોનું વિકલન સમજાવી કણનો રેખીય વેગ , રેખીય વેગમાન અને કોણીય વેગમાનના સૂત્રો મેળવો.
18.	પૃથ્વીનું કોણીય વેગમાન શોધો.
19.	સદિશ વિકલન ઓપરેટર ∇ વિશેની માહિતી આપો.
20.	લાપલાસીય સમીકરણો લખો.
21.	સદિશના કર્લનું ભૌમિતિક મહત્વ સમજાવો.

MCQ questions :

1.	કોઇ પણ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ અદિશ રાશી કે સદિશ રાશી ?(Surface area of any surface is scalar or vector quantity ?)	અદિશ રાશી
	ક્ષેત્રફળ _______ રાશી છે.(Area is a _______physical quantity.)(a) અદિશ(Scalar) (b) સદિશ(vector)(c) બંને(scalar and vector)(d) એક પણ નહીં(none of these)	(a)
2.	જો $\varnothing(x,y,z) = 2x^2y - y^2z^2$ હોયતો (1,-2,-1) બિંદુ આગળ $\nabla\varnothing$ = _______.(If $\varnothing(x,y,z) = 2x^2y - y^2z^2$, $\nabla\varnothing$ = _______at point(1,-2,-1).) (a) $-12\hat{\imath} - 9\hat{\jmath} - 16\hat{k}$ (b) $-8\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + 8\hat{k}$ (c) $12\hat{\imath} + 9\hat{\jmath} + 16\hat{k}$ (d) $8\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} - 8\hat{k}$	(c)
3.	સદિશ F નું ડાયવર્જેન્સ કઇ સંજ્ઞાથી રજૂ થાય. (By which symbol diversion of vector F is explain ?) (a) $\int \vec{F}\,\vec{da}$ (b) $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ (c) $\int \vec{F}\,\vec{dl}$ (d) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$	(d)
4.	ત્રણ એકમ સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર ________ થાય. (Dot product of three unit vector is ________.) (a) શૂન્ય (Zero) (b) એક (One) (c) અનંત(Infinite) (d) આમાંથી એકપણ નહીં(None of these)	(a)
5.	$\vec{A} \parallel \vec{B}$ હોયતો $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ =______ (If $\vec{A} \parallel \vec{B}$ then $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ =______) (a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) α	(c)
6.	જો $\vec{A}$, $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ લંબઘનની બાજુઓ હોયતો લંબઘનનું કદ ________થાય. (If $\vec{A}$, $\vec{B}$ and $\vec{C}$ are adjacent side of a parallelepiped then __________would be volume) (a) $\vec{A}\ X\ \vec{B} \times \vec{C}$ (b) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ (c) $\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}$ (d) $\vec{A}\,(\vec{B} \cdot \vec{C})$	(b)
7.	અદિશ ક્ષેત્રમાં અદિશ વિધેય ______________ હોય છે.(Scalar function in scalar field is _____________ .) (a) સતત(Continuous) (b) અસતત(Discreet) (c) અંશતઃ સતત(Partly continuous) (d) અંશતઃ અસતત(Partly discreet)	(a)
8	$\nabla\varnothing$ ને _________ હોય છે. ($\nabla\varnothing$ has_________) (a)માત્ર મૂલ્ય(only value) (b) માત્ર દિશા (only direction) (c) મૂલ્ય અને દિશા બંને(both value and direction) (d) એકપણ નહીં (none of the above)	(c)
9.	તાપમાનની રાશિ દર્શોવો.(Write physical quantities of temperature.) (a) સદિશ (Vector)(b) અદિશ(Scalar) (c) સેંટીગ્રેડ(Centigrade) (d) ફેરનહીટ(Fahrenheit)	(b)

10.	કર્લ એટલે શું ? (What is curl ?) (a) સદિશ ગુણાકાર(vector product) (b)અદિશ ગુણાકાર(scalar product) (c)સદિશ સરવાળો (vector addition)(d)અદિશ સરવાળો(scalar addition)	(b)
11.	ઘનતા ___________ રાશિ છે.(Density is a ___________ physical quantity.) (a) અદિશ(Scalar) (b) સદિશ(vector) (c) અદિશ અને સદિશ(scalar and vector) (d) એકેય નહીં(none of these)	(a)
12.	$\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath}$ = _________ (a) 1 (b) 2 (c) -1 (d) 0	(d)
13.	કોઇ પણ સદિશક્ષેત્રના ડાયવર્જૅન્સનું અમુક કદ પર લીધેલું કદ સંકલન તે કદને ઘેરાતા પૃષ્ઠ પરના સદિશના પૃષ્ઠ સંકલન જેટલું હોય છે. આ વિધાનને ________ કહે છે.(________ theorem states that the normal surface integral of a vector function over the boundary of a closed surface which is the flux across surface is equal to the volume integral of the divergence of the function over the volume enclosed by the surface.) (a) સ્ટોકનો પ્રમેય(Stoke's theorem)(b) ગોસ-ડાયવર્જૅન પ્રમેય(Gauss-Divergence theorem) (c) ગ્રીન પ્રમેય(Green's theorem)(d) કાર્નોટ પ્રમેય(Carnot's theorem)	(b)
14.	વિધુત ફલકસ કઇ રાશિ છે ?(What kind of physical quantity electric flux ?) (a) અદિશ(Scalar) (b) સદિશ(vector) (c) ટેન્સર(Tenser) (d) એક પણ નહીં(none)	(b)
15.	જો કણનો રેખીય વેગ $\vec{\upsilon}$ અને રેખીય વેગમાન $\vec{p}$ હોય તો $\vec{\upsilon} \times \vec{p}$ = _________.(If linear velocity $\vec{\upsilon}$ and linear momentum $\vec{p}$ of a particle then $\vec{\upsilon} \times \vec{p}$ =_________) (a) 1 (b) 1 કરતાં મોટું (more then one)(c) 0(zero) (d) એક પણ નહીં(none)	(d)
16.	સમતલસ્થ સદિશો $\vec{A}$, $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ માટે $\vec{\boldsymbol{A}}\cdot(\vec{\boldsymbol{B}}\times\vec{\boldsymbol{C}})$ = __________. (For three coplanar vectors $\vec{A}$, $\vec{B}$ and $\vec{C}$ then $\vec{\boldsymbol{A}}\cdot(\vec{\boldsymbol{B}}\times\vec{\boldsymbol{C}})$ = __________.) (a) 1 (b) 0(zero) (c) અનંત(infinite) (d) 1/4	(b)
17.	ટોર્ક ________ રાશિ છે. (અદિશ / સદિશ) Torque is ________quantity (scalar / vector)	સદિશ
18.	$\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}$ = _________. ($\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}$ = _________.) (a)[$\vec{A}$ $\vec{B}$ $\vec{C}$] (b)AB cos Θ (c) AB sin Θ (d) શક્ય નથી(Not possible)	(d)

19.	સદિશ વિધેયનો કર્લ સદિશ રાશિ છે કે અદિશ ? (Is curl of vector function Scalar or vector ?)	અદિશ
20.	ત્રિઅદિશ ગુણાકાર__________ (a) અદિશ છે. (b) સદિશ છે. (c) માત્ર અદિશો સાથેનો ગુણાકાર છે. (d) બે સદિશ અને એક અદિશ વચ્ચેનો ગુણાકાર છે,	(a)
21.	$[\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}\,]$ નુ મુલ્ય _______ છે. (a) 1 (b) ∞ (c) π/2 (d) શુન્ય	(d)
22.	$[\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}\,]$ મા જો બે સદિશો એકબીજાને સમાંતર હોય તો $[\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}\,]$ નુ મુલ્ય _______ (a) સદિશ $\vec{A}$ના મુલ્ય જેવુ મળે. (b) સદિશ $\vec{A} \times \vec{B}$ના મુલ્ય જેવુ મળે. જ્યાં $\vec{A} \parallel \vec{B}$ છે. (c) શુન્ય મળે. (d) અનંત મળે.	(c)
23.	ત્રિઅદિશ ગુણાકાર એ _________ (a) કોઈ પણ આકારના પદાર્થનું કદ આપે છે. (b) સમતલના ક્ષેત્રફળનોવર્ગ આપે છે. (c) ચતુષ્ફલકનું કદ આપે છે. (d)માત્ર ગોળાનું જ કદ આપે છે.	(c)
24.	$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ થી મળતો સદિશ ____________ (a) $\vec{A}$ અને $\vec{A}$ નુ રેખિય સંયોજન છે. (b) $\vec{A}$ અને $\vec{A}$ નુ રેખિય સંયોજન છે. (c) $\vec{A}$અને $\vec{A}$ નુ રેખિય સંયોજન છે. (d) ઉપરના બધા વિધાનો ખોટા છે.	(b)
25.	જો $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = 4(\vec{B} - 8\vec{C}$ હોય તો , (a) $\vec{A} \cdot \vec{C} = 4$ (b) $\vec{A} \cdot \vec{B} = 8$ (c) $\vec{A} \cdot \vec{C} = 8$ (d) $\vec{A} \cdot \vec{B} = -4$	(a) , (b)
26.	જો $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ માં અને પરસ્પર લંબ હોય તો $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ (a) $\vec{B}$ ને લંબ છે. (b) $\vec{C}$ ને લંબ છે. (c) $\vec{B}$ ને સમાંતર છે. (d) $\vec{C}$ ને સમાંતર છે.	(c)
27.	$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ નો સદિશ ____________ (a) $\vec{A}$ ને લંબ પણ $\vec{C}$ ને સમાંતર છે. (b) $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ એમ ત્રણેયને લંબ છે. (c) ની કોઇ નિશ્ચિત દિશા હોતી નથી. (d) ઉપરના બધા વિધાનો ખોટા છે.	(d)
28	$\hat{\imath} \times (\hat{\jmath} \times \hat{k}) =$................ (a) 1 (b) અનંત (c) વ્યાખ્યાયિત થઇ શકે નહીં (d) 0	(d)
29	એક કણનો સ્થાન સદિશ સૂત્ર (2,3t , 4t^2) અનુસાર સમય સાથે બદલાય છે તો t=1 સેકન્ડે તેનો પ્રવેગ .... હશે. સેકન્ડમાં અને સ્થાન સદિશ મીટરમાં છે. (a) 0 $^m/_{S^2}$ (b) $8\hat{k}$ $^m/_{S^2}$ (c) $\sqrt{13}\hat{\jmath}$ $^m/_{S^2}$ (d) $5\hat{k}$ $^m/_{S^2}$	(b)
30	કોઇ સમયે એક કણનો વેગ સદિશ (0, 2t , 3t) છે. તો t =2 સેકન્ડે તેનો સ્થાન સદિશ--------- હશે. કણની ગતિ ઉગમબિંદુથી શરુ થાય છે. (a) (0,9,4) (b) (9, 4,0) (c) (0 ,4 ,9) (d) (4, 9, 0)	(c)
31	નીચેના માંથી ક્યું ક્ષેત્ર અદિશ ક્ષેત્ર છે ? (a) ઓરડામાં તાપમાનની વહેંચણી (b) ઓરડામાં વિધુતક્ષેત્રની વહેંચણી	(a)

	(c) પાણીનું ધારારેખી વહન (d) પાણીનું વમળયુક્ત વહન	
32	$grad\left(\frac{1}{r}\right)$નું સૂત્ર --------- છે. જ્યાં $\widehat{e_r}$ એ $\vec{r}$ સદિશ ની દિશામાં એકમ સદિશ છે. (a) $-\frac{1}{r^2}$ (b) $-\frac{1}{r^2}\widehat{e_r}$ (c) $\frac{1}{r}\widehat{e_r}$ (d) $-\frac{1}{r}\widehat{e_r}$	(b)
33	જો $\vec{B}$ એ ચુંબકીય પ્રેરણ હોય તો $\nabla\cdot\vec{B}$ = ------------- (a) $4\pi\vec{B}$ (b) 0 (c) $\vec{B}$ પર આધાર રાખી ગમે તે (d) ઉપરનામાંથી કોઇ નહીં	(b)
34	એક વિદ્યુતક્ષેત્રમાં વિદ્યુતસ્થિતિમાન $v(x,y,z) = -7x^2\, 2y$ વડે અપાય છે તો વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધો. (a) $-21x\hat{\imath}+2\hat{\jmath}$ (b) $21x\hat{\imath}-2\hat{\jmath}$ (c) $21x\hat{\imath}+2\hat{\jmath}$ (d) $-21x\hat{\imath}-2\hat{\jmath}$	(b)
35	જો $\vec{B}$ એ ચુંબકીય પ્રેરણ હોય તો $\nabla\cdot\vec{B}$ આ પરિણામ દર્શાવે છેકે (a)આપેલ બિંદુ પાસે $\vec{B}$ ક્ષેત્રમાં એકમ કદમાં કંઇક પ્રાપ્તિસ્થાન(source) છે. (b) આપેલ બિંદુ પાસે $\vec{B}$ ક્ષેત્રમાં એકમ કદમાં કંઇક sink છે. (c) (a) અને (b) બંને સાચા છે. (d) (a) અને (b) બંને ખોટા છે.	(d)
36	આપેલ ક્ષેત્ર સોલેનોઇડ ક્ષેત્ર ત્યારે કહેવાય જ્યારે -------------- (a) ક્ષેત્રનો ગ્રેડિયન્ટ શૂન્ય હોય (b) ક્ષેત્રનો curl શૂન્ય હોય (c) ક્ષેત્રનો ડાઇવર્જન શૂન્ય હોય (d) ક્ષેત્ર અદિશ હોય	(c)
37	એક સદિશ ક્ષેત્રનો curl શૂન્ય છે, તો આ ક્ષેત્ર ----------- (a) ઝડપથી બદલાતુ હશે (b) અ-ભ્રમણીય કહેવાય (c) ચુંબકીય ક્ષેત્ર હશે. (d) ઉપરનામાંથી એક પણ નહીં	(b)
38	ગૉસનો ડાયવર્જન પ્રમેય ક્ષેત્રના ------------------ (a) રેખા સંકલન અને કદ સંકલનને સાંકળે છે.(b) ડાયવર્જનના રેખા સંકલન અને ક્ષેત્રના કદ સંકલનને સાંકળે છે. (c) ડાયવર્જનના કદ સંકલન અને ક્ષેત્રના પૃષ્ટ સંકલનને સાંકળે છે. (d) ઉપરનામાંથી એક પણ નહીં	(c)
39	ગૉસનો ડાયવર્જન પ્રમેય -------- (a) ક્ષેત્રના ગ્રેડિયન્ટ અને કર્લ વચ્ચેનો સંબંધ છે. (b) ક્ષેત્રના ગ્રેડિયન્ટ અને ડાયવર્જન વચ્ચેનો સંબંધ છે. (c) ક્ષેત્રના ડાયવર્જનનું મૂલ્ય આપે છે. (d) ઉપરના બધા વિધાનો ખોટાં છે.	(d)
40	$\iiint(\nabla\cdot\vec{F})d\tau$ શું દર્શાવે છે ? (a) કદના પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલા ફ્લકસ (b) કદના પૃષ્ઠ પરના દરેક બિંદુએ ક્ષેત્ર (c) કદમાં કુલ ક્ષેત્ર (d) ઉપરનામાંથી એક પણ નહીં	(a)
41	સ્ટોકના પ્રમેયમાં ક્યા સંકલનો આવે છે ?	(b)

	(a) ડાયવર્જનનું રેખા સંકલન અને ક્ષેત્રનું કદ સંકલન (b)કર્લનું પૃષ્ઠ સંકલન અને ક્ષેત્રનું રેખા સંકલન (c)કર્લનું રેખા સંકલન અને ક્ષેત્રનું પૃષ્ઠ સંકલન (d) ક્ષેત્રના રેખા અને પૃષ્ઠ સંકલન	
42	$\nabla \times (\nabla \times \vec{F})$ ને $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ માટેનું સૂત્ર લગાડીએ તો $(\nabla \times \nabla \times \vec{F})$ =--------- (a) $\nabla^2 \times F$ (b) $\nabla^2 \cdot \vec{F} - \nabla \cdot \vec{F}$ (c)$\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$ (d) ઉપરનામાંથી એક પણ નહીં	(c)
43	$\nabla \cdot (\emptyset \vec{A}) = \emptyset \nabla \cdot \vec{A} + - - - - - - - -$ (a) $\vec{A} \cdot (\emptyset \nabla)$ (b) $\vec{A} \cdot \emptyset \nabla$ (c) $(\vec{A} \emptyset) \cdot \nabla$ (d) ઉપરનામાંથી એક પણ નહીં	(a)